Auxiliar 2

Fuerzas centrales

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Scattering en pozo de potencial

Una fuerza central usada en física nuclear está descrita por un potencial que tiene la forma de un **pozo de potencial**, definido como:

$$U = \begin{cases} 0, & \text{si } r > a \\ -U_0, & \text{si } r \leq a. \end{cases}$$

Muestre que el scattering producido por este potencial en mecánica clásica es idéntico a la refracción de la luz producida por una esfera de radio a e índice de refracción relativo

$$n = \sqrt{\frac{E + U_0}{E}}\,.$$

Muestre también que la sección eficaz diferencial es

$$\sigma(\Theta) = \frac{n^2 a^2}{4\cos(\Theta/2)} \frac{(n\cos(\Theta/2) - 1)\,(n - \cos(\Theta/2))}{\left(1 + n^2 - 2n\cos(\Theta/2)\right)^2}\,.$$

P2.- Scattering para ángulos pequeños - Propuesto

Considere un proceso de scattering donde el parámetro de impacto s es muy grande, por lo que la partícula scattereada (de masa m_1 y velocidad inicial v_∞) sufre solo un leve desvío de su trayectoria original.

Demuestre que para este caso el (pequeño) ángulo de scattering es

$$\theta_1 = -\frac{2s}{m_1 v_\infty^2} \int_s^\infty \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\,,$$

resuelva esta integral para el caso $U = \alpha/r^n$ $(n > 0)$ y demuestre que la sección eficaz diferencial es

$$\sigma(\theta_1) = \frac{1}{n} \left[\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2 + 1/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2}\right]^{2/n} {\theta_1}^{-2-2/n}$$

P3.- Precesión de Mercurio

Considere que el movimiento de una partícula de masa m bajo efecto de un potencial

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}$$

es el mismo movimiento como si solo estuviese el potencial de Kepler, pero en un sistema de referencia que está rotando o precesando alrededor del centro de fuerza (en torno a $r = 0$).

Para una energía total negativa, muestre que si el potencial adicional es muy pequeño en comparación al potencial de Kepler, la velocidad angular de precesión de una órbita elíptica es

$$\Omega = \frac{2\pi m h}{l^2 \tau} .$$

Se ha observado que el perihelio de Mercurio precesa a una tasa de 43 arcosegundo por siglo. Muestre que esta precesión puede ser considerada como un efecto clásico (no relativista) si la cantidad adimensional

$$\eta = \frac{h}{ka}$$

es del orden de 7×10^{-8} (la excentricidad de la órbita de Mercurio es $e = 0.206$ y su periodo es 0.24 años)

Scattering

La sección eficaz diferencial se calcula como

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin(\Theta)} \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Theta} \right| ,$$

donde s es el parámetro de impacto y Θ el ángulo en el que la partícula sale deflectada y que puede ser expresada como

$$\Theta = |\pi - 2\Psi| ,$$

donde Ψ se calcula como

$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} ,$$

con r_m la distancia más cercana de la partícula al centro de fuerza (se calcula con la energía y tomando $\dot{r} = 0$).

Fuerzas centrales

Cuando tenemos únicamente una fuerza central $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ (o una suma de fuerzas centrales), para obtener la trayectoria de la partícula, $u = u(\theta)$, es útil la ecuación de Binet

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} V\left[\frac{1}{u}\right] ,$$

donde V es el potencial asociado a la fuerza central, definido como $\vec{F}(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\hat{r}$.

Auxiliar 2

P1

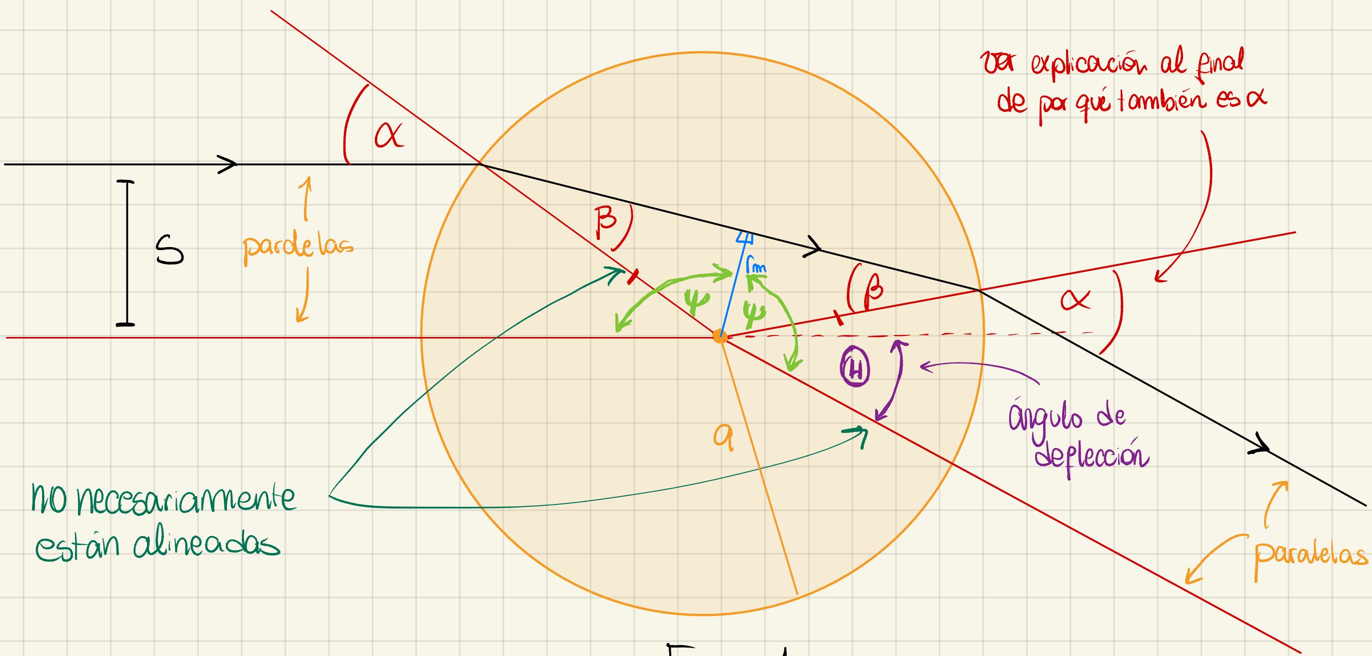
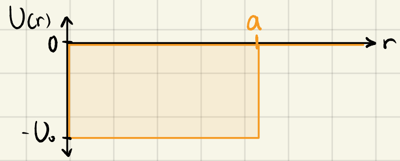


Figura 1

El movimiento de una partícula sujeta a un potencial de la forma

$$U = \begin{cases} 0, & \text{si } r > a \\ -U_0, & \text{si } r \leq a \end{cases}$$



es como el mostrado en la figura, donde solo hay potencial en la región circular naranja. Matemáticamente este potencial puede ser descrito por una función heaviside

$$U(r) = -U_0\,\Theta(r-a)\ , \text{ donde } \Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

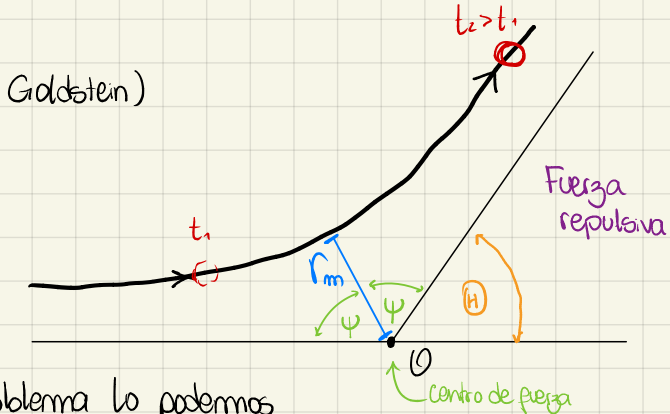
y como la fuerza se calcula como $\vec{F}(r) = -\nabla U(r) = -\partial U/\partial r \cdot \hat{r}$

$$\Rightarrow F(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = U_0 \frac{\partial}{\partial r}\Theta(a-r) \overset{z=a-r}{=} U_0 \frac{\partial \Theta(z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r} \overset{\delta(x)=\frac{\partial\Theta(x)}{\partial x}}{=} -U_0\,\delta(z) = -U_0\,\delta(a-r)$$

por lo tanto la fuerza central consiste en una fuerza que es 0 en todas partes excepto en un círculo de radio $r=a$ donde vale $\vec{F}(r) = -U_0 \cdot \infty \cdot \hat{r}$, o sea que por el instante en que la partícula cruza este círculo esta es atraída hacia el centro, pero de inmediato la fuerza se hace 0 dentro de la región naranja así que la partícula es deflectada hacia dentro en $r=a$ y luego sigue una línea recta hasta cruzar nuevamente $r=a$ donde es deflectada nuevamente.

En scattering considerando una sola partícula y el centro de fuerza fijo en el origen, deseamos usar la fórmula

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right| \qquad (\text{ec. } 3.93 \text{ Goldstein})$$



por lo que nuestro objetivo es encontrar $s = s(\Theta)$, o sea encontrar el (los) parámetro de impacto s que produce que la partícula sea deflectada un ángulo Θ

Debido a que la partícula sigue líneas rectas, este problema lo podemos hacer a "pura geometría". Por dibujo encontramos que $\psi = \pi/2 - \beta + \alpha$ y como $\Theta = |\pi - 2\psi|$

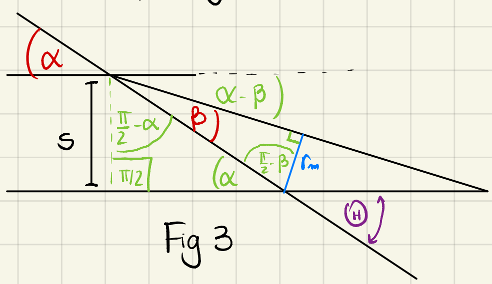


Fig 3

$$\Rightarrow \Theta = |\pi - \pi - 2\beta + 2\alpha| = |2\alpha - 2\beta| = 2(\alpha - \beta)$$

Necesitamos relacionar los ángulos con el parámetro de impacto s. Paremos a pensar lo que sucede con la partícula cuando es deflectada viendo la Fig 4 nuestro problema es similar al de la luz siendo refractada en una interfaz, donde como la fuerza solo es en $\hat{r}$ (y por un instante), entonces hay conservación del momentum lineal en la dirección perpendicular a $\hat{r}$, o sea tenemos

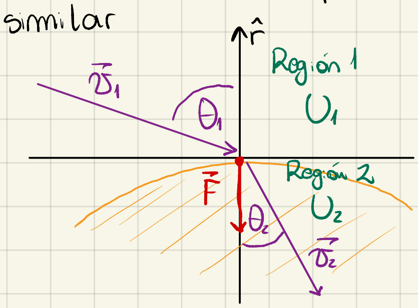


Fig. 4.

$$p_1^{\perp} = p_2^{\perp} \Leftrightarrow m v_1 \sin\theta_1 = m v_2 \sin\theta_2 \Leftrightarrow \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_2}{v_1}, \quad \text{donde } v_i = |\vec{v}_i|$$

además como la fuerza es central, la energía total se conserva $E_1 = E_2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + U_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + U_2 \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2}{m v_1^2}(U_1 - U_2)} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

donde identificamos el índice de refracción $n = \sqrt{1 + \frac{2}{m v_1^2}(U_1 - U_2)}$, donde en nuestro caso $U_1 = 0$, $U_2 = -U_0$ y

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{m v_1^2/2 + U_0}{m v_1^2/2}} = \sqrt{\frac{E + U_0}{E}}$$

En nuestro problema identificamos $\theta_1 = \alpha$ y $\theta_2 = \beta$, así que tenemos

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \Theta/2)} = n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha - \Theta/2)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos(\Theta/2) - \cos\alpha\sin(\Theta/2)}{\sin\alpha} = \cos(\Theta/2) - \cot\alpha\,\sin(\Theta/2) = \frac{1}{n}$$

También tenemos que $s = a \cdot \sin\alpha \Rightarrow s^2 = a^2\sin^2\alpha = a^2 - a^2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - s^2/a^2}$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1 - s^2/a^2}}{s/a} = \sqrt{a^2/s^2 - 1} \Rightarrow \cos(\Theta/2) - \sqrt{a^2/s^2 - 1}\,\sin(\Theta/2) = \frac{1}{n}$$

toca despejar s en función de Θ

$$\Rightarrow \left(\cos(\Theta/2) - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{\sin^2(\Theta/2)} + 1 = \frac{a^2}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \left[\left(\cos(\Theta/2) - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{a^2 \sin^2(\Theta/2)} + \frac{1}{a^2}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\cos^2(\Theta/2) - 2\cos(2\Theta)/n + 1/n^2 + \sin^2(\Theta/2)}{a^2\sin^2(\Theta/2)}\right]^{-1}$$

$$= \frac{a^2\sin^2(\Theta/2)}{1/n^2 - 2\cos(\Theta/2)/n + 1} = \frac{a^2 n^2 \sin^2(\Theta/2)}{1 - 2n\cos(\Theta/2) + n^2}$$

con lo que encontramos nuestra relación $s = s(\Theta)$. Derivando c/r a Θ

$$\frac{ds}{d\Theta} = \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{a^2n^2\sin^2(\Theta/2)}{1-2n\cos(\Theta/2)+n^2}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{a^2n^2}{2}\,\frac{(1-2n\cos(\Theta/2)+n^2)^{1/2}}{an\sin(\Theta/2)}\left[\frac{\sin(\Theta/2)\cos(\Theta/2)(1-2n\cos(\Theta/2)+n^2) - n\sin^3(\Theta/2)}{(1-2n\cos(\Theta/2)+n^2)^2}\right]$$

$$= \frac{an}{2}\left[\frac{\cos(\Theta/2) - n\cos^2(\Theta/2) + n^2\cos(\Theta/2) - n}{(1-2n\cos(\Theta/2)+n^2)^{3/2}}\right]$$

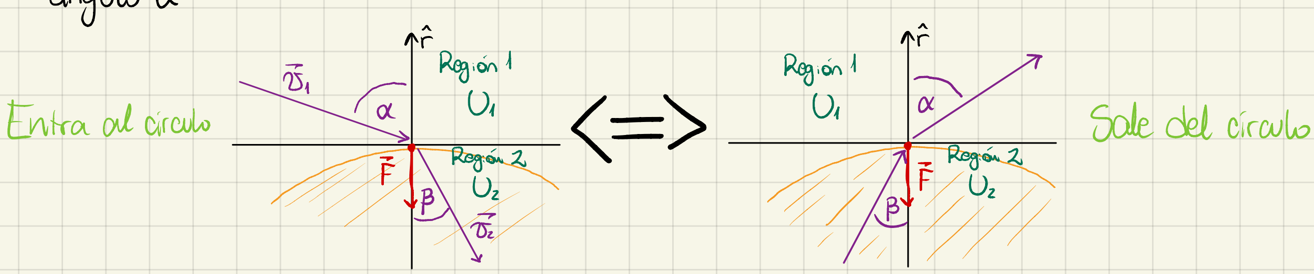
por lo que la sección eficaz de scattering sería

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin(\Theta)}\left|\frac{ds}{d\Theta}\right| = \frac{an\sin(\Theta/2)}{(1-2n\cos(\Theta/2)+n^2)^{1/2}}\,\frac{1}{\sin(\Theta)}\,\frac{an}{2}\left[\frac{\cos(\Theta/2) - n\cos^2(\Theta/2) + n^2\cos(\Theta/2) - n}{(1-2n\cos(\Theta/2)+n^2)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{a^2n^2}{4\cos(\Theta/2)}\,\frac{(n\cos(\Theta/2)-1)(n-\cos(\Theta/2))}{(1-2n\cos(\Theta/2)+n^2)^2}$$

con lo que demostramos lo pedido

* Tenemos que la partícula entra y sale con ángulo α (igual), ya que los ángulos internos son β (iguales) al formar parte de un triángulo isósceles, entonces cuando la partícula sale del círculo es lo mismo como si la partícula saliese del medio 2 con un ángulo β y por ende sale al medio 1 con ángulo α



P3

Primero analicemos el caso con solo potencial de Kepler, $U(r) = -k/r = -k\cdot u$, reemplazando en la ec. de Binet

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{d}{du}\left[-ku\right] \Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mk}{\ell^2}$$

que tiene como sol. $u(\theta) = u_h(\theta) + u_p(\theta) = A\cos(\theta-\theta_0) + \frac{mk}{\ell^2}$, donde θ_0 es el ángulo inicial $\theta(t=0)=\theta_0$

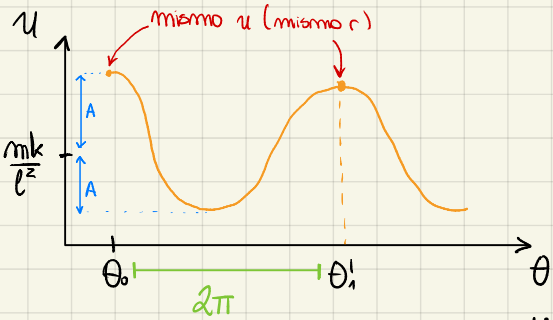


Fig 1.

Donde notamos que u es periódica en θ (por lo tanto $r(\theta)$ también) en particular u vuelve a su valor inicial (cuando $\theta=\theta_0$) luego de haber avanzando 2π, $u(2\pi+\theta_0) = u(\theta_0)$.

Ahora, si agregamos el potencial h/r^2 la ec de Binet queda como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell^2}\frac{d}{du}\left[-ku + hu^2\right] \Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + 2\frac{mh}{\ell^2}\right)u = \frac{mk}{\ell^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + \omega_0^2 u = \frac{mk}{\ell^2} \Rightarrow \boxed{u(\theta) = B\cos(\omega_0(\theta-\theta_0)) + \frac{mk}{\ell^2}}, \text{ con } \omega_0 = \sqrt{1+\frac{2mh}{\ell^2}}$$

donde tiene una forma muy parecida, pero ahora si imponemos que $u(\theta_2') = u(\theta_0)$ para algún θ_2' (antes $\theta_1' = \theta_0 + 2\pi$) necesitamos imponer que

$$\omega_0(\theta_2'-\theta_0) \overset{!}{=} 2\pi \Rightarrow \theta_2' - \theta_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+2mh/\ell^2}} \quad (1)$$

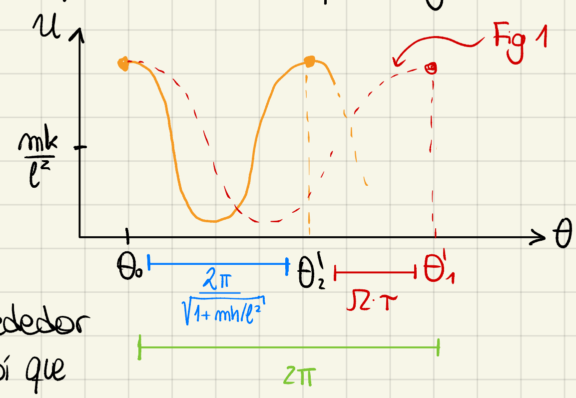


Fig 2.

por enunciado nos dicen que consideremos que el movimiento de Mercurio como si siguiese órbitas elípticas pero en un marco de referencia S' que rota con velocidad angular Ω alrededor del origen (donde $r=0$, o sea uno de los focos de la órbita), así que podemos considerar un "shift" $\underline{\Omega\cdot\tau}$ como (ver Fig 2.)

$$\theta_2 - \theta_0 = \theta_1 - \theta_0 - \underline{\Omega\tau} = 2\pi - \Omega\tau \quad (2)$$

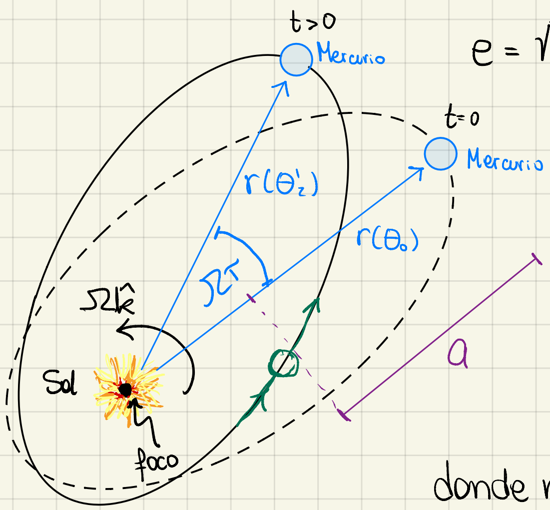
, con τ el periodo $\tau = 2\pi/\omega_0$

Por enunciado nos dicen que consideremos $h \ll 1 \Rightarrow 2mh/\ell^2 \ll 1$ así que hagamos un Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right]^{(n)}\Bigg|_{x=0} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \cancel{O(x^2)}^{\sim 0} \approx 1 - \frac{x}{2} = 1 - \frac{mh}{\ell^2}$$

así que juntando (1) y (2): $2\pi - \Omega\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{1+2mh/\ell^2}} \Rightarrow \Omega \approx \frac{2\pi}{\tau}\left(1 - \left(1 - \frac{mh}{\ell^2}\right)\right) = \boxed{\frac{2\pi mh}{\tau\ell^2}}$

Ahora, ya encontramos que podemos describir el mov. de Mercurio como una órbita elíptica normal, pero que está rotando con velocidad angular (constante) Ω, además sabemos que para una órbita planetaria elíptica (bajo potencial de Kepler) su excentricidad se escribe como



$e = \sqrt{1 - \ell^2/mka}$, donde a es el semieje mayor

$$\Rightarrow \ell^2 = mka(1-e^2)$$

reemplazando en $\Omega \Rightarrow \Omega = \dfrac{2\pi \cancel{m} \eta}{\tau \cancel{m} ka(1-e^2)} = \dfrac{2\pi\eta}{\tau(1-e^2)}$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\tau\Omega(1-e^2)}{2\pi}$$

donde nos dicen que la precesión de Mercurio es de $43\,[\text{arcsec}\cdot(100\text{yr})^{-1}]$ que en radianes es $\Omega = 2.1\cdot 10^{-6}\ \text{rad}\cdot\text{yr}^{-1}$, además nos dicen que $e = 0.206$ y $\tau = 0.24\text{yr}$

$$\Rightarrow \eta = 0.24\,[\text{yr}]\ 2.1\cdot 10^{-6}\,[\text{rad}\cdot\text{yr}^{-1}]\,(1-(0.206)^2)\cdot\frac{1}{2\pi\,[\text{rad}]} \approx \boxed{7.6\cdot 10^{-8}}$$