

## Auxiliar 2

### Coordenadas esféricas

**Profesor: Gonzalo Palma**

Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi

Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

**P1.-**

Considere una curva espiral descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

$$r = R, \quad \phi = N\theta,$$

donde  $R$  y  $N$  son constantes conocidas ( $N$  entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el extremo superior ( $\theta = 0$ ) y manteniendo una velocidad angular cenital constante y conocida,  $\dot{\theta} = \omega_0$ . Se pide:

- Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleración para una posición arbitraria de la partícula sobre su trayectoria.
- Determine el valor del radio de curvatura de la trayectoria en el ecuador ( $\theta = \pi/2$ ).
- Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Indicación:** De ser difícil de calcular, puede dejar expresada la integral.

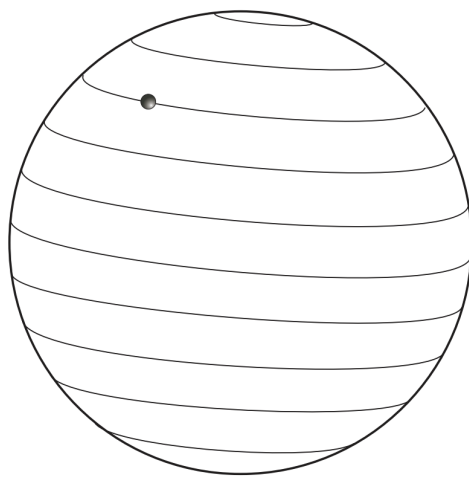


Figura 1: P1

**P2.-**

Considere una curva espiral cónica descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

$$\theta = \pi/4, \quad \phi = 2\pi \frac{r}{R},$$

donde  $R$  es una constante conocida. Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el origen manteniendo una velocidad radial constante y conocida,  $\dot{r} = c$ . Se pide:

- Determine la distancia radial del punto  $P$  en el cual la rapidez de la partícula es  $3c$ . Esta será la longitud radial máxima de la espira.
- Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Nota:** Está bien si deja su solución en términos de una integral muy complicada.
- Determine el valor del radio de curvatura de la trayectoria en el punto  $P$ .

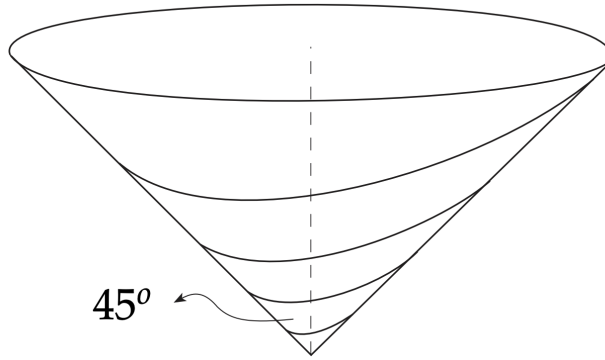


Figura 2: P2

## Formulario

### Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en coordenadas esféricas están dados por:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\phi} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{d(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)}{dt}\hat{\phi} \end{aligned}$$

## Auxiliar 2

Coordenadas esféricas

$\boxed{P_1}$  Como  $\dot{\theta} = \omega_0$  constante

$$\Rightarrow \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega_0 dt$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = \omega_0 t$$

a) Ahora, como  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  tiene primeras y segundas derivadas, derivamos cada variable

●  $\triangleright r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\triangleright \theta(t) = \omega_0 t, \dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\triangleright \phi = N\theta \Rightarrow \dot{\phi} = N\dot{\theta} = N\omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$$

reemplazamos dejando todo en función de  $\theta$  (posición)

$$\square \vec{v} = 0\hat{r} + R\omega_0\hat{\theta} + RN\omega_0\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\square \vec{a} = (0 - R\omega_0^2 - RN^2\omega_0^2\sin^2\theta)\hat{r}$$

●  $+ (0 + 0 - RN^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}$

$$+ (0 + 0 + 2RN\omega_0^2\cos\theta)\hat{\phi}$$

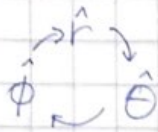
b) El radio de curvatura se calcula como

$$\rho_c = \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}$$

El módulo de  $\vec{v}$  sería  $\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\omega_0^2 + R^2N^2\omega_0^2\sin^2\theta}$

y el producto cruz

$$\vec{v} \times \vec{a} = [R\omega_0 \hat{\theta} + RN\omega_0 \sin\theta \hat{\phi}] \times [(-R\omega_0^2 - RN^2\omega_0^2 \sin^2\theta) \hat{r} - RN^2\omega_0^2 \sin\theta \cos\theta \hat{\theta} + 2RN\omega_0^2 \cos\theta \hat{\phi}]$$



$$\begin{aligned} &= R\omega_0 (R\omega_0^2 + RN^2\omega_0^2 \sin^2\theta) \hat{\phi} \\ &\quad + 2R^2N\omega_0^3 \cos\theta \hat{r} \\ &\quad + (R^2N\omega_0^3 \sin\theta - R^2N^3\omega_0^3 \sin^3\theta) \hat{\theta} \\ &\quad + R^2N^3\omega_0^3 \sin^2\theta \cos\theta \hat{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (2R^2N\omega_0^3 \cos\theta + R^2N^3\omega_0^3 \sin^2\theta \cos\theta) \hat{r} \\ &\quad - (R^2N\omega_0^3 \sin\theta + R^2N^3\omega_0^3 \sin^3\theta) \hat{\theta} \\ &\quad + (R^2\omega_0^3 + R^2N^2\omega_0^3 \sin^2\theta) \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\vec{v} \times \vec{a}\| &= [4R^4N^2\omega_0^6 \cos^2\theta + 4R^4N^4\omega_0^6 \sin^2\theta \cos^2\theta + R^4N^6\omega_0^6 \sin^4\theta \cos^2\theta \\ &\quad + R^4N^2\omega_0^6 \sin^2\theta + 2R^4N^4\omega_0^6 \sin^4\theta + R^4N^6\omega_0^6 \sin^6\theta \\ &\quad + R^4\omega_0^6 + 2R^4N^2\omega_0^6 \sin^2\theta]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dots = R^2\omega_0^3 (1+N^2)^{3/2} \rightarrow \text{lo hice con Mathematica}$$

$\theta = \pi/2$  Recomendación: Evaluar  $\theta = \pi/2$  antes

Reemplazando

$$P_c = \frac{R^3\omega_0^3 (1+N^2)^{3/2}}{R^2\omega_0^3 (1+N^2)^{3/2}} = R$$



c) Para calcular la distancia recorrida, se ocupa la fórmula

$$d = \int_{t_0}^{t_f} \|\vec{v}\| dt$$

Además, como  $\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t$ , la partícula se demora

$$\theta(t_f) = \pi = \omega_0 t_f$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{\pi}{\omega_0}$$

● Reemplazando

$$\Rightarrow d = \int_0^{\pi/\omega_0} (R^2 \omega_0^2 + R^2 N^2 \omega_0^2 \sin^2 \theta)^{1/2} dt$$

como  $\theta = \omega_0 t$

$$= \int_0^{\pi/\omega_0} R \omega_0 (1 + N^2 \sin^2 \omega_0 t)^{1/2} dt$$

●

P<sub>2</sub> Tenemos

$$\square \dot{r} = c \Rightarrow r = ct \quad \text{y} \quad \ddot{r} = 0$$

$$\square \phi = \frac{2\pi r}{R} = \frac{2\pi}{R} ct \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{2\pi c}{R} \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$$

$$\square \theta = \pi/4 \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

Reemplazamos en la fórmula de la velocidad esférica

$$\vec{v} = c\hat{r} + c^2 t \frac{2\pi}{R} \sin\theta \hat{\phi} =$$

$$= c\hat{r} + \frac{\sqrt{2}c^2 t \pi \hat{\phi}}{R}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \left( c^2 + \frac{2c^4 t^2 \pi^2}{R^2} \right)^{1/2}$$

Veamos cuándo  $\|\vec{v}(t^*)\| = 3c$

$$\Rightarrow c \left( 1 + \frac{2c^2 t^{*2} \pi^2}{R^2} \right)^{1/2} = 3c$$

$$\Rightarrow \frac{2c^2 t^{*2} \pi^2}{R^2} = 8 \Rightarrow t^* = \frac{2R}{\pi c} \Rightarrow r^* = \frac{2R}{\pi}$$

b) Ocupando la misma fórmula que antes

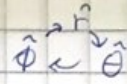
$$d = \int_0^{t^*} c \left( 1 + \frac{2c^2 \pi^2 t^2}{R^2} \right)^{1/2} dt$$

c) Necesitamos expresar la aceleración

$$\vec{a} = -ct \frac{4\pi^2 c^2}{R^2} \frac{1}{2} \hat{r} - ct \frac{4\pi^2 c^2}{R^2} \frac{1}{2} \hat{\theta} + 2c \frac{2\pi c}{R} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow -\frac{4\pi c^2}{R} \hat{r} - \frac{4\pi c^2}{R} \hat{\theta} + \frac{2\pi c^2 \sqrt{2}}{R} \hat{\phi} = \vec{a}(t^*)$$

Hacemos el producto cruz



$$\vec{v} \times \vec{a} = (c\hat{r} + 2\sqrt{2}c\hat{\phi}) \times \left( -\frac{4\pi c^2}{R}\hat{r} - \frac{4\pi c^2}{R}\hat{\theta} + \frac{2\sqrt{2}\pi c^2}{R}\hat{\phi} \right)$$

$$= -\frac{4\pi c^3}{R}\hat{\phi} - \frac{2\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{\theta}$$

$$- \frac{8\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{\theta} + \frac{8\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{r}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{r} - \frac{10\sqrt{2}\pi c^3}{R}\hat{\theta} - \frac{4\pi c^3}{R}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v} \times \vec{a}\| = \frac{\pi c^3}{R} (128 + 200 + 16)^{1/2}$$

$$= \frac{\pi c^3 \sqrt{344}}{R} = \frac{2\pi c^3 \sqrt{86}}{R}$$

Reemplazamos en la fórmula

$$p_c = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} = \frac{27c^3 R}{2\pi c^3 \sqrt{86}}$$

●