Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 2

Cinemática y coordenadas polares

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- (**Tokio 2020**)

En la disciplina del lanzamiento de bala en los JJ.OO. se sospecha del uso de un mecanismo de imanes y balas trucadas para alterar su trayectoria y hacerla llegar más lejos, es por esto que nos disponemos a calcular diferentes parámetros analizando los videos de los lanzamientos y compararlos con datos anteriores para poder declarar si un lanzamiento está alterado.

Si se sabe que uno de los deportistas lanza la bala con una velocidad inicial v_0 y un ángulo θ con respecto al suelo, calcule:

1. El radio de curvatura al inicio del lanzamiento.
2. El radio de curvatura en el punto más alto.
3. El valor de θ para que la altura máxima que alcanza la bala sea el doble del radio de curvatura en ese punto.

P2.-

Se tiene una plataforma de largo L, que rota con respecto a un eje en el punto O, en el extremo izquierdo de la base de largo $2L$, con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega_0$ como se observa en la Figura.

Una partícula de masa m se encuentra sobre esta plataforma y amarrada a una cuerda de largo $2L$ sujeta al extremo P de la base, o sea, cuando la plataforma comienza a elevarse, $\theta = 0$, la cuerda está completamente estirada y la masa se encuentra en el punto O, pero con el movimiento de la plataforma comienza a deslizarse sobre ella.

Calcule la distancia de la masa m al origen O en función del ángulo θ, $r(\theta)$, y con esto calcule $\dot{r}$ y $\ddot{r}$, también en función del ángulo.

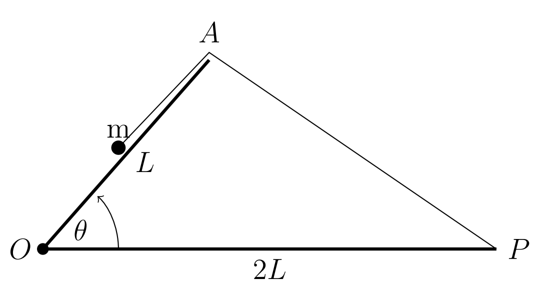


Figura 1

P3.-

Luego de un largo día de trabajo, un pescador se dispone a la peligrosa misión diaria de cruzar un río de ancho D, partiendo desde A e intentando llegar al punto O en la orilla opuesta. El agua del río tiene una velocidad constante $\vec{v}_0$ en todo su ancho, por lo que el pescador debe remar con una velocidad $\vec{v}_p$ relativa al agua[1] y siempre apuntando a O como se observa en la Figura.

1. Usando coordenadas polares determine las ecuaciones de $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ en función de r, θ, v_0 y v_p. Con estas ecuaciones exprese $\frac{dr}{d\theta}$ en función de los mismos parámetros.

2. Integre la expresión de 1. para encontrar la trayectoria en función de θ, D y las velocidades enunciadas, ¿qué condición debe cumplir v_p para que el pescador pueda llegar a O?

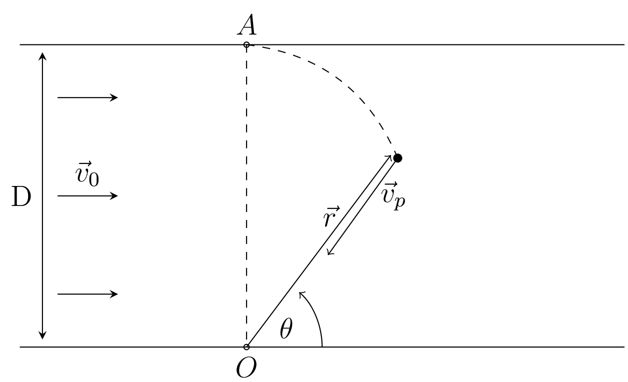


Figura 2

[1] Ojo con la diferencia entre la velocidad relativa a la orilla y relativa al agua

Pauta Auxiliar 2

Cinemática y coordenadas polares

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- (**Tokio 2020**)

En la disciplina del lanzamiento de bala en los JJ.OO. se sospecha del uso de un mecanismo de imanes y balas trucadas para alterar su trayectoria y hacerla llegar más lejos, es por esto que nos disponemos a calcular diferentes parámetros analizando los videos de los lanzamientos y compararlos con datos anteriores para poder declarar si un lanzamiento está alterado.

Si se sabe que uno de los deportistas lanza la bala con una velocidad inicial v_0 y un ángulo θ con respecto al suelo, calcule:

1. El radio de curvatura al inicio del lanzamiento.
2. El radio de curvatura en el punto más alto.
3. El valor de θ para que la altura máxima que alcanza la bala sea el doble del radio de curvatura en ese punto.

Hint: Considere la aceleración de gravedad constante igual a g y que no hay roce con el aire.

Respuesta

La única aceleración actuando es la de gravedad, ya que no hay roce con el aire, o sea, $\ddot{x} = 0$ y $\ddot{y} = -g$, o sea, $\vec{a} = -g\hat{y}$.

Debido a que el lanzamiento se hace de forma diagonal, podemos descomponer la velocidad inicial de la bala, en función del ángulo, en sus coordenadas cartesianas $\hat{i}$ y $\hat{j}$ formando un triángulo rectángulo y usando seno y coseno, de la forma:

$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta; \;\; v_{y,0} = v_0 \operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

Recordando la fórmula del radio de curvatura,

$$\rho = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}, \tag{2}$$

donde tenemos que para el inicio del lanzamiento $\|\vec{v}_0\| = v_0$ y,

$$\|\vec{v}_0 \times \vec{a}\| = \left\|(v_0 \cos\theta\hat{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\hat{j}) \times -g\hat{j}\right\| = \left\|-gv_0\cos\theta\hat{k}\right\| = gv_0\cos\theta, \tag{3}$$

con lo que el radio de curvatura para $t = 0$ es:

$$\rho_0 = \frac{v_0^3}{gv_0 \cos\theta} = \frac{v_0^2}{g\cos\theta} \tag{4}$$

Debido al curso de Introducción a la Física Clásica sabemos que en el punto más alto de un movimiento parabólico, el objeto tiene velocidad únicamente en la horizontal (deja de subir y justo comienza a bajar). Como $\ddot{x} = 0$ sabemos que $\dot{x} = c_1$, con c_1 una constante, ya que la derivada de una constante es 0, así que la velocidad en el eje x se mantiene constante en todo el movimiento, o sea, es igual a la velocidad inicial $\dot{x} = v_x = v_{x,0} = v_0 \cos\theta$, así que en el punto más alto tenemos:

$$\begin{gathered}\vec{v}_1 = v_0 \cos\theta \hat{i} + 0\hat{j} \\ \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \left\|v_0 \cos\theta \hat{i}\right\| = v_0\cos\theta,\end{gathered}$$

calculamos el denominador del radio de curvatura:

$$\|\vec{v}_1 \times \vec{a}\| = \left\|v_0\cos\theta\hat{i} \times -g\hat{j}\right\| = \left\|-gv_0\cos\theta\hat{k}\right\| = gv_0\cos\theta. \tag{5}$$

Así que el radio de curvatura en el punto más alto es:

$$\rho_1 = \frac{(v_0\cos\theta)^3}{gv_0\cos\theta} = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g} \tag{6}$$

Para hacer la alternativa 3. primero debemos calcular la altura que alcanza la bala en el punto más alto, para eso ocupamos que como $\ddot{y} = \dot{v}_y = -g$ integramos con respecto al tiempo

$$\begin{gathered}\int_{v_y(t_0)}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{dt}dt = \int_{t_0=0}^{t} -gdt \\ \int_{v_{y,0}}^{v_y} dv_y = -g\int_0^t dt \\ v_y - v_{y,0} = -gt\end{gathered}$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \operatorname{sen}\theta. \tag{7}$$

Podemos integrar nuevamente esta ecuación para obtener la posición vertical

$$\begin{gathered}\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dy}{dt}dt = \int_{t_0=0}^{t} -gtdt + \int_{t_0=0}^{t} v_0\operatorname{sen}\theta dt \\ \int_{y_0}^{y} dy = -g\int_0^t tdt + v_0\operatorname{sen}\theta\int_0^t dt \\ y - y_0 = -g\frac{t^2}{2} + v_0\operatorname{sen}\theta\cdot t\end{gathered}$$

$$y(t) = y_0 + v_0\operatorname{sen}\theta\cdot t - g\frac{t^2}{2}, \tag{8}$$

donde $y_0 = 0$, ya que se lanza la bala desde el piso.

Sabemos que en el punto más alto la velocidad vertical es 0, así que ocupamos la ecuación (7) para calcular el tiempo en el que sucede

$$0 = -gt_1 + v_0 \operatorname{sen}\theta$$
$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g},$$

reemplazamos este tiempo en (8)

$$y(t_1) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} = h, \tag{9}$$

con h la altura máxima del movimiento.

Ahora necesitamos que el radio de curvatura sea la mitad que eso, igualamos con la expresión del radio de curvatura encontrado antes y despejamos el ángulo θ:

$$\rho_1 := \frac{h}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{4g}$$
$$\Rightarrow \tan^2\theta = 4$$
$$\Leftrightarrow \tan\theta = \pm 2$$
$$\Rightarrow \theta = \arctan 2$$

P2.-

Se tiene una plataforma de largo L, que rota con respecto a un eje en el punto O, en el extremo izquierdo de la base de largo $2L$, con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega_0$ como se observa en la Figura.

Una partícula de masa m se encuentra sobre esta plataforma y amarrada a una cuerda de largo $2L$ sujeta al extremo P de la base, o sea, cuando la plataforma comienza a elevarse, $\theta = 0$, la cuerda está completamente estirada y la masa se encuentra en el punto O, pero con el movimiento de la plataforma comienza a deslizarse sobre ella.

Calcule la distancia de la masa m al origen O en función del tiempo y con esto calcule su posición, velocidad y aceleración en función del ángulo de la plataforma θ.

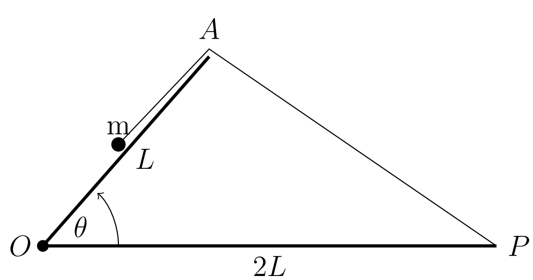
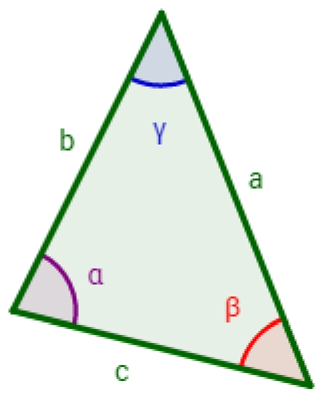


Figura 1

Respuesta

Usamos teorema del coseno.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

Figura 2

Definiendo la distancia AP como d, la distancia de la masa al punto A como x y la distancia de O a la masa como r, nos queda:

$$d^2 = 4L^2 + L^2 - 2 \cdot 2L^2 \cos\theta$$
$$d = L\sqrt{5 - 4\cos\theta},$$

además, por geometría tenemos:

$$r = L - x; \; x + d = 2L$$
$$\Rightarrow r = d - L$$
$$\Rightarrow r(\theta) = L(\sqrt{5 - 4\cos\theta} - 1).$$

Ya con la posición solo basta con derivar una vez y dos veces para obtener la velocidad y aceleración.

$$\dot{r} = \frac{L \cdot 4\sin\theta \cdot \dot{\theta}}{2\sqrt{5 - 4\cos\theta}} = \frac{2L\sin\theta \cdot \omega_0}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}}, \tag{10}$$

notamos que podemos simplificar el cálculo usando regla de la cadena:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \cdot \omega_0,$$

calculamos la derivada con la regla de la división:

$$\frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{2L\omega_0\cos\theta\cdot\sqrt{5-4\cos\theta} - \frac{4L\sin^2\theta\cdot\omega_0}{\sqrt{5-4\cos\theta}}}{5-4\cos\theta}$$

$$\frac{d\dot{r}}{d\theta} = 2L\omega_0\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} - \frac{2\sin^2\theta}{(5-4\cos\theta)^{3/2}}\right)$$

$$\frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{2L\omega_0}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\left(\cos\theta - \frac{2\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{r}(\theta) = \frac{2L\omega_0^2}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\left(\cos\theta - \frac{2\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\right)$$

$\boxed{\textbf{P3.-}}$

Un pescador debe cruzar un río de ancho D, partiendo desde A e intentando llegar al punto O en la orilla opuesta. El agua del río tiene una velocidad constante $\vec{v}_0$ en todo su ancho, por lo que el pescador debe remar con una velocidad $\vec{v}_p$ relativa al agua y siempre apuntando a O como se observa en la Figura.

1. Usando coordenadas polares determine las ecuaciones de $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ en función de r, θ, v_0 y v_p. Con estas ecuaciones exprese $\frac{dr}{d\theta}$ en función de los mismos parámetros.

2. Integre la expresión de 1. para encontrar la trayectoria en función de θ, D y las velocidades, ¿qué condición debe cumplir v_p para que el pescador pueda llegar a O?

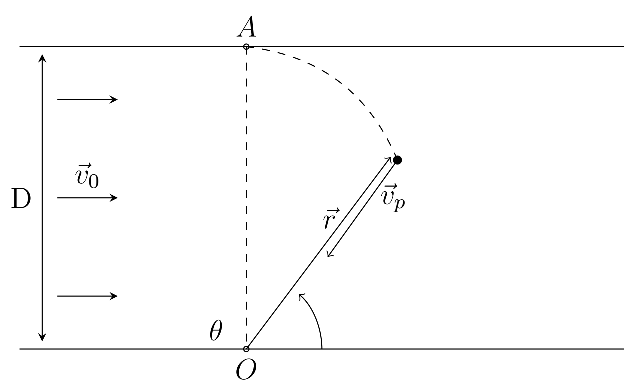


Figura 3


AQUÍ ESTÁ LA PAUTA DE LA P3
Lapatrulladeborrachines/zorro1
PERO YA LA HICIMOS
PERFECTO, NO HABÍA PAUTA
imgflip.com

Figura 4