Auxiliar 29

Sólido rígido IV

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.- **[Examen recuperativo 2020]**

Un disco homogéneo de radio R y masa M rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal. Un resorte de largo natural $D > R$ y constante elástica k conecta al centro del disco con una pared. Adicionalmente, una persona mantiene una tabla horizontal sobre el disco, de tal forma que la tabla puede transmitir una fuerza periódica $\vec{F} = F_0 \cos(\Omega t)\hat{x}$ sobre el punto de contacto entre la tabla y el disco.

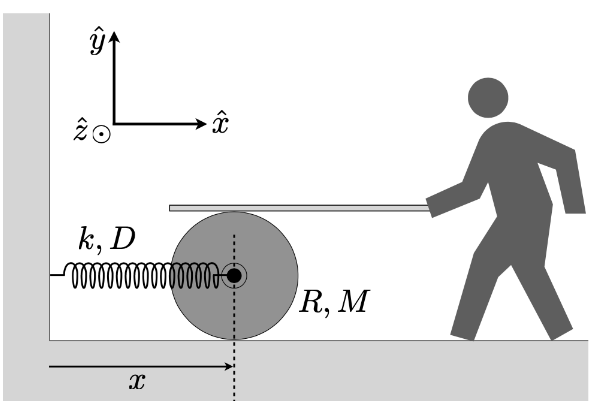
a) Calcule el momento angular del disco con respecto a su centro (de masa)

b) Haga un diagrama con las fuerzas que actúan sobre el disco, y determine una expresión para el torque total que actúa sobre el disco con respecto a su centro

c) Encuentre la ecuación de movimiento para la posición x del centro del disco. ¿Cuál debe ser el valor de Ω_0 para que el disco entre en resonancia?

d) Suponga que $\Omega_0 = \sqrt{2k/M}$. Si en $t = 0$ se tiene $x = D - \frac{3F_0}{4k}$ y $\dot{x} = 0$, calcule la fuerza de roce estático $\vec{F}_e$ que el suelo ejerce sobre el disco $\forall t$

Indicación: En la parte b) no se pide encontrar una expresión explícita para la fuerza de roce estático $\vec{F}_e$ que el suelo ejerce sobre el disco



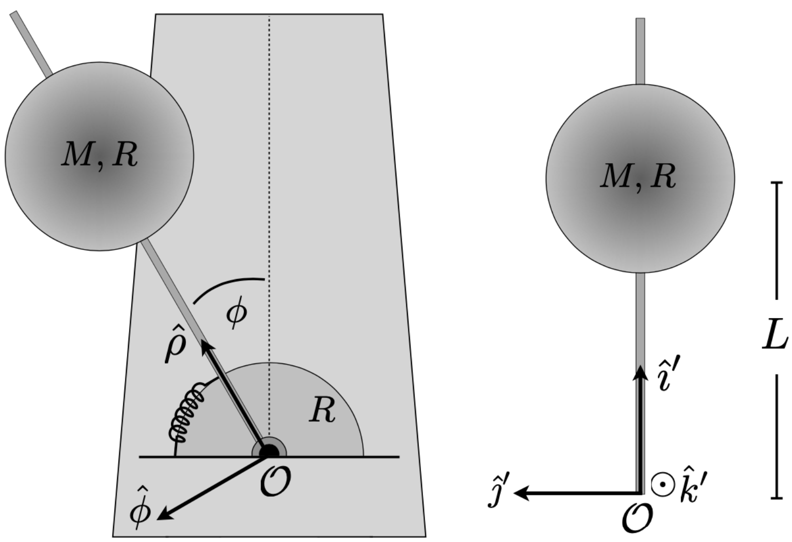
P2.- **[Examen 2020]**

Considere un metrónomo consistente en disco de masa M y radio R adherido a una varilla de masa despreciable. El extremo inferior de la varilla puede girar sin fricción en torno a un eje ubicado en el origen $\mathcal{O}$ (ver figura). Otro disco de radio R, centrado en el origen, mantiene un resorte circunscrito a su borde, con un extremo conectado a la varilla, y otro a la base del metrónomo. El resorte tiene constante elástica k y largo natural $R\pi/2$. La distancia L del centro de masas del disco al origen puede ser ajustada para conseguir que el metrónomo oscile con el periodo deseado. El disco tiene una densidad de masa superficial dad por $\sigma(r) = \frac{2M}{\pi R^4}(R^2 - r^2)$, donde r es la distancia al centro del disco. Puede **despreciar** la fuerza de gravedad.

a) Calcule la matriz de inercia del péndulo del metrónomo respecto al origen $\mathcal{O}$. Exprese la matriz en términos de la base cartesiana $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ de la figura

b) Determine la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ (recuerde despreciar la gravedad)

c) Si el metrónomo se activa en $t = 0$ con $\phi = \phi_0$ y $\dot{\phi} = 0$, determine la fuerza $\vec{F}_{\text{eje}}$ que el eje ejerce sobre la varilla como función de ϕ. ¿Es posible ajustar la distancia L del disco de modo que $\vec{F}_{\text{eje}} \cdot \hat{\phi} = 0$ siempre?



Formulario

Tensor de inercia

Para un sólido rígido con una distribución continua (no necesariamente homogénea) de masa, su tensor de inercia (tomando como pivote/origen un punto $\mathcal{O}'$) se calcula como

$$I_{\mathcal{O}'} = \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}m'$$

que también se puede escribir como

$$I_{\mathcal{O}'}^{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\, \mathrm{d}m \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
El diferencial de masa se expresa de distintas formas según si el sólido es lineal, superficial o volumétrico

$$\mathrm{d}m' = \lambda\, \mathrm{d}l' \ , \quad \mathrm{d}m' = \sigma\, \mathrm{d}A' \ , \quad \mathrm{d}m' = \rho\, \mathrm{d}V' \ ,$$

estás densidades pueden ser homogéneas o depender de la posición en el cuerpo.

Teorema Steiner

Si tenemos calculado el tensor de inercia con respecto al CM, I_{CM}, podemos calcular el tensor de inercia con respecto a otro pivote/origen $\mathcal{O}$ usando el teorema de Steiner

$$I_{\mathcal{O}}^{ij} = I_{\mathrm{CM}}^{ij} + M_{\mathrm{tot}} \left[R_{\mathrm{CM}}^2 \delta_{ij} - R_{\mathrm{CM}i} R_{j\mathrm{CM}} \right] \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $\vec{R}_{\mathrm{CM}} = (R_{\mathrm{CM}1}, R_{\mathrm{CM}2}, R_{\mathrm{CM}3})$ es el vector posición que va desde $\mathcal{O}$ a CM.

Ecuaciones de movimiento

La relación entre el momentum angular y torque de un sólido rígido es:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}$$

donde $\vec{L} = I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega}$ con $I_{\mathcal{O}}$ el tensor de inercia medido c/r al pivote y $\vec{\Omega}$ el vector velocidad angular del cuerpo.

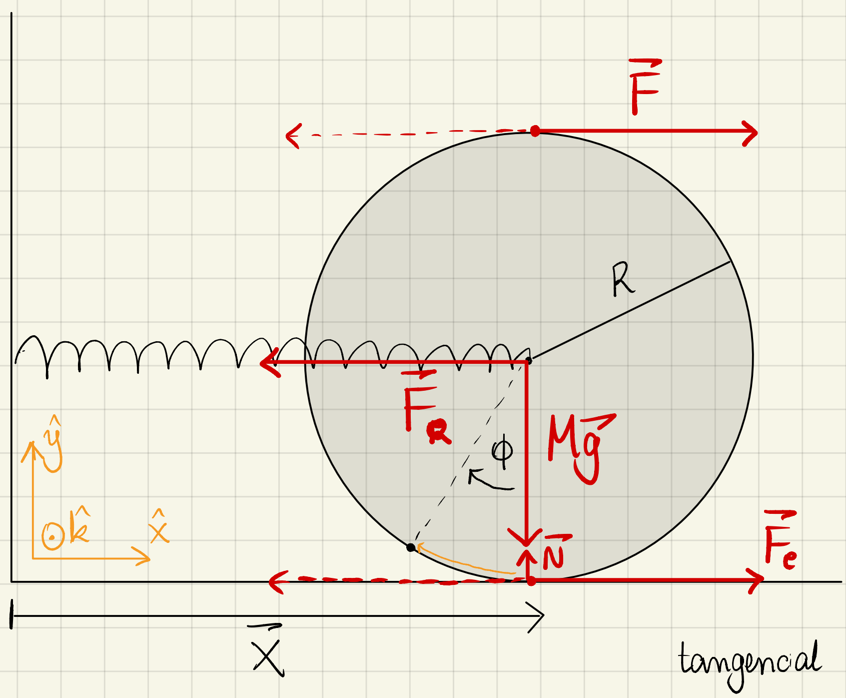
La segunda Ley de Newton para un sólido rígido se expresa como:

$$M_{\mathrm{tot}} \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\mathrm{ext}}$$

con M_{tot} la masa total, $\vec{R}$ el vector posición del centro de masa y $\vec{F}^{\mathrm{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$ la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sólido rígido.

Auxiliar 29

P1



a) Recordemos que la matriz de inercia es una propiedad intrínseca del sólido, por lo que re-usamos la que calculamos el auxiliar anterior

$$I_{CM} = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix}$$

Si nos fijamos en un punto de la superficie, su velocidad vista desde un punto en el suelo es $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'$$

donde como no resbala $\vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{v}'$ es la velocidad del punto vista desde el CM que sería una velocidad tangencial $\vec{v}' = -R\dot{\phi}\hat{x}$ y $\vec{v}_{CM} = \dot{x}\hat{x}$

Cuando ese punto hace contacto con el piso

$$\Rightarrow \vec{0} = \dot{x}\hat{x} - R\dot{\phi}\hat{x} \Leftrightarrow \dot{x} = R\dot{\phi}$$

Toca definir la velocidad angular $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ donde por regla de la mano derecha sería

$$\vec{\Omega} = -\dot{\phi}\hat{k} = -\frac{\dot{x}}{R}\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}}{R} \end{pmatrix} \qquad \therefore \vec{L} = I_0\vec{\Omega} = -\frac{MR}{2}\dot{x}\hat{k}$$

b) Queremos calcular el torque c/r al CM (tenemos el $\vec{L}$ c/r al CM también) así que notamos que los brazos de palanca de $\vec{F}_e$ y $M\vec{g}$ son $\vec{0}$, así que estas fuerzas no ejercen torque, mientras que $\vec{F}_e$ y $\vec{F}$ sí (y $\vec{N}$ es paralelo al brazo de palanca)

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = -R\hat{y} \times (F_e\hat{x}) + R\hat{y} \times (F_0\cos(\Omega_0 t)\hat{x})$$

$$= RF_e\hat{k} - RF_0\cos(\Omega_0 t)\hat{k} \longleftarrow \text{torque total}$$

c) Usamos $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$ (con ambos medidos desde CM)

$$-\frac{MR}{2}\ddot{x}\hat{k} = RF_e\hat{k} - RF_0\cos(\Omega_0 t)\hat{k} \quad (1)$$

no conocemos F_e, así que saquemos otra ecuación de $M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$, donde $\vec{R}_{CM} = x\hat{x} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = \ddot{x}\hat{x}$ y

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = M\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_R + \vec{F} + \vec{N} = -Mg\hat{y} + F_e\hat{x} - k(x-D)\hat{x} + F_0\cos(\Omega_0 t)\hat{x} + N\hat{y}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x}\hat{x} = -Mg\hat{y} + F_e\hat{x} - k(x-D)\hat{x} + F_0\cos(\Omega_0 t)\hat{x} + N\hat{y}$$

la ec escalar en $\hat{x}$) nos dice $M\ddot{x} = F_e - k(x-D) + F_0\cos(\Omega_0 t) \Leftrightarrow F_e = M\ddot{x} + k(x-D) - F_0\cos(\Omega_0 t)$, reemplazando en (1)

$$\Rightarrow -\frac{MR}{2}\ddot{x} = RM\ddot{x} + Rk(x-D) - RF_0\cos(\Omega_0 t) - RF_0\cos(\Omega_0 t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}\cdot\frac{3M}{2} + k(x-D) - 2F_0\cos(\Omega_0 t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}(x-D) = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M}\cos(\Omega_0 t)$$, definamos $u = x - D \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{x}$ y $\omega_0^2 \equiv \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{M}}$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}u = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M}\cos(\Omega_0 t)$$

la sol. homogénea es $u_h(t) = A\cos\left(\frac{2}{3}\frac{k}{M}t\right) + B\sin\left(\frac{2}{3}\frac{k}{M}t\right)$ y para la particular proponemos $u_p(t) = C\cdot\cos(\Omega_0 t)$

$$\Rightarrow -C\Omega_0^2\cancel{\cos(\Omega_0 t)} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}C\cancel{\cos(\Omega_0 t)} = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M}\cancel{\cos(\Omega_0 t)}$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{2}{3}\frac{k}{M} - \Omega_0^2\right) = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M} \Rightarrow C = \frac{4F_0/3M}{2k/3M - \Omega_0^2}$$

definamos $\omega_0^2 \equiv \frac{2k}{3M}$, $Q_0 \equiv \frac{4F_0}{3M}$ $\Rightarrow u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\cos(\Omega_0 t)$ (2)

donde notamos que si $\Omega_0 = \omega_0$ la sol. particular diverge $\Rightarrow$ resonancia!

d) Nuestras C.I. serían $u(t=0) = x(t=0) - D = \frac{3F_0}{4k}$ y $\dot{u}(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$, utilizándolas en (2)

▷ $u(t=0) = A + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} \overset{!}{=} \frac{3F_0}{4k} \Rightarrow A = \frac{3F_0}{4k} - \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}$

▷ $\dot{u}(t=0) = B\omega_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow B = 0$

$x = u + D$

$$\therefore x(t) = \left(\frac{3F_0}{4k} - \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\cos(\Omega_0 t) + D \quad (3)$$

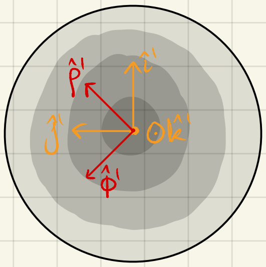
nos dicen que $\Omega_0^2 = 2k/M$
me dio pereza reemplazar

Para encontrar Fe derivamos (3) y reemplazamos en (1)

$$F_e = -\frac{M}{2}\left[-\omega_0^2\left(\frac{3F_0}{4k} - \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t) - \frac{\Omega_0^2 Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\cos(\Omega_0 t)\right] + F_0\cos(\Omega_0 t)$$

P2

a) Olvidémosnos del metrónomo completo y calculemos el tensor de inercial del disco



Hacemos el cambio de variable $x' = \rho'\cos\phi'$ ^ $y' = \rho'\sin\phi'$ considerando $z' = 0$, los elementos fuera de la diagonal son 0 por las mismas razones del auxiliar anterior ($z' = 0$ y $\int_0^{2\pi} \cos\phi' \sin\phi' \, d\phi' = 0$)
Para calcular los elementos de la diagonal usamos que

$$dm'(r') = \sigma'(r')\, dA' = \frac{2M}{\pi R^4}(R^2 - r^2)\, \rho' d\rho' d\phi'$$

▷ $$I_{CM}^{11} = \int_0^{2\pi}\int_0^R (\rho'^2 - \rho'^2\cos^2\phi')\, \frac{2M}{\pi R^4}(R^2 - \rho'^2)\, \rho' d\rho' d\phi'$$

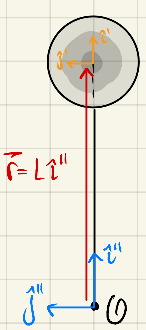
$$= \frac{2M}{\pi R^4}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi'\, d\phi' \left[R^2 \int_0^R \rho'^3 d\rho' - \int_0^R \rho'^4 d\rho' \right] = \frac{MR^2}{6}$$

▷ $$I_{CM}^{22} = \frac{2M}{\pi R^4}\int_0^{2\pi} \cos^2\phi'\, d\phi' \left[R^2 \int_0^R \rho'^3 d\rho' - \int_0^R \rho'^4 d\rho' \right] = \frac{MR^2}{6}$$

▷ $$I_{CM}^{33} = \frac{4M}{R^4}\left[R^2 \int_0^R \rho'^3 d\rho' - \int_0^R \rho'^4 d\rho' \right] = \frac{MR^2}{3}$$

$$\therefore\ I_{CM} = \frac{MR^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

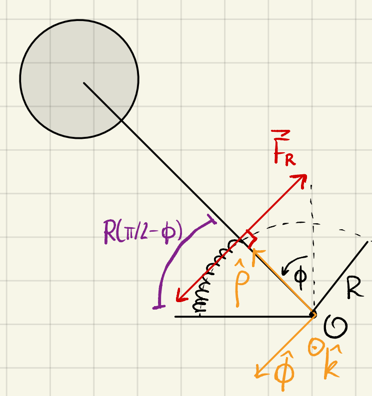
b) Queremos utilizar $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$ así que usemos Steiner para obtener el tensor de inercia medido c/r a O



Por dibujo tenemos $\vec{r} = (L, 0, 0)$ así que se nos va la mayoría de elementos de la contribución por Steiner

muy parecido al aux anterior

$$\Rightarrow I_O = I_{CM} + ML^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} R^2/6 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 + R^2/6 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 + R^2/3 \end{pmatrix}$$



Como ignoramos la gravedad, solo el resorte genera torque dado por

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = R\hat{\rho} \times \left(+k\left(\overbrace{R\left(\frac{\pi}{\cancel{2}} - \phi\right)}^{r} - \overbrace{\frac{R\pi}{\cancel{2}}}^{l_0} \right)\hat{\phi} \right)$$

en $\phi > 0$ el resorte estaría comprimido

$$= -R^2 k\phi\hat{k}$$

Para calcular $\vec{L} = I_O\vec{\Omega}$ usamos regla de la mano derecha $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{L} = M\left(L^2 + \frac{R^2}{3}\right)\dot{\phi}\hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{L}} = M\left(L^2 + \frac{R^2}{3}\right)\ddot{\phi}\hat{k}$

así que la EoM sería

$$M\left(L^2+\frac{R^2}{3}\right)\ddot{\phi} + R^2 k\phi = 0 \iff \ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0 \quad \text{con} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{R^2 k}{M}\left(L^2+\frac{R^2}{3}\right)^{-1}$$

c) Para hacer aparecer la fuerza del pivote ocupamos $M\ddot{\vec{R}}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$ donde $\vec{R}_{cm} = L\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{cm} = L\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{cm} = -L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}$ y las fuerzas serán

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_R + \vec{F}_\rho + \vec{F}_\phi$$

$$= -kR\phi\hat{\phi} + F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi}, \quad \text{donde} \quad \vec{F}_{piv} = F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow M(-L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}) = -kR\phi\hat{\phi} + F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi}$$

$\hat{\rho}$) $F_\rho = -ML\dot{\phi}^2$ $\qquad$ $\hat{\phi}$) $F_\phi = ML\ddot{\phi} + kR\phi$

donde $\ddot{\phi} = -\omega_0^2\phi$ y ocupando truco de mecánica

$$\int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\, d\dot{\phi} = -\omega_0^2 \int_{\phi_0}^{\phi} \phi\, d\phi \iff \frac{\dot{\phi}^2}{2} = -\frac{\omega_0^2}{2}(\phi^2 - \phi_0^2)$$

$$\therefore \vec{F}_{piv} = ML\omega_0^2(\phi^2 - \phi_0^2)\hat{\rho} - ML\omega_0^2\phi\hat{\phi} + kR\phi\hat{\phi}$$

Si hacemos $\vec{F}_{piv}\cdot\hat{\phi} = 0 \iff -\cancel{M}L\frac{R^2\cancel{k}}{\cancel{M}}\frac{1}{(L^2+R^2/3)} + \cancel{k}\cancel{R} \overset{!}{=} 0 \iff -LR + L^2 + R^2/3 \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow L_{1,2} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4R^2/3}}{2} \in \mathbb{C} \longrightarrow \times$$