Auxiliar 27

Sólido rígido II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.-

Utilizando el teorema de Steiner, calcule los tensores de inercia de los siguientes casos:

a) [**Propuesto**] Una barra de largo L y masa M con respecto a uno de sus extremos

b) [**Propuesto**] Una esfera de radio R y masa M con respecto a un punto en su superficie

c) Un disco de radio R y masa M con respecto a un punto que, medido desde este punto, el centro de masa se encuentra a una distancia $\vec{r}_{\text{CM}} = (r_{\text{CM}x}, r_{\text{CM}y}, r_{\text{CM}z})$

Considere para los 3 casos que la densidad de masa es uniforme en todos los objetos.

P2.-

Considere un disco de radio R y masa M (homogéneamente distribuida) colocado en forma vertical. El sistema puede girar con roce despreciable alrededor de un eje $\mathcal{O}$ horizontal que pasa a una distancia $R/2$ del centro del disco. Inicialmente, el disco se encuentra en reposo, sujeto a una cuerda fija al punto P (ver figura)

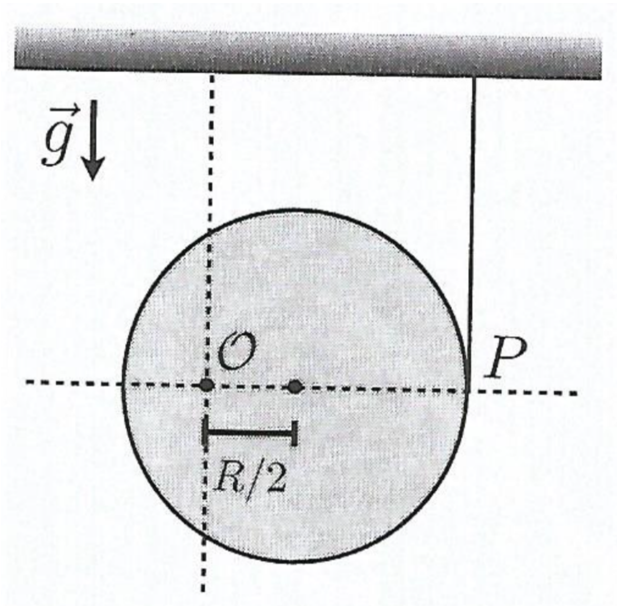
a) Calcule el tensor de inercia del disco con respecto al punto $\mathcal{O}$ por donde pasa el eje horizontal

b) Calcule la tensión de la cuerda

Ahora considere que se corta la cuerda, se pide lo siguiente:

c) Determine la velocidad angular máxima del disco en su movimiento

d) Encuentre la expresión de la fuerza que ejerce el pivote $\mathcal{O}$ sobre el disco para todo ángulo ϕ medido desde la vertical al eje $\mathcal{O} - \text{CM}$



Formulario

Tensor de inercia

Para un sólido rígido con una distribución continua (no necesariamente homogénea) de masa, su tensor de inercia (tomando como pivote/origen un punto $\mathcal{O}'$) se calcula como

$$I_{\mathcal{O}'} = \int \begin{pmatrix} (y')^2 + (z')^2 & -x'y' & -x'z' \\ -y'x' & (x')^2 + (z')^2 & -y'z' \\ -z'x' & -z'y' & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}m'$$

que también se puede escribir como

$$I^{ij}_{\mathcal{O}'} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\, \mathrm{d}m \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
El diferencial de masa se expresa de distintas formas según si el sólido es lineal, superficial o volumétrico

$$\mathrm{d}m' = \lambda\, \mathrm{d}l' \ , \quad \mathrm{d}m' = \sigma\, \mathrm{d}A' \ , \quad \mathrm{d}m' = \rho\, \mathrm{d}V' \ .$$

Teorema Steiner

Si tenemos calculado el tensor de inercia con respecto al CM, I_{CM}, podemos calcular el tensor de inercia con respecto a otro pivote/origen $\mathcal{O}$ usando el teorema de Steiner

$$I^{ij}_{\mathcal{O}} = I^{ij}_{\text{CM}} + M_{\text{tot}} \left[R^2_{\text{CM}} \delta_{ij} - R_{\text{CM}i} R_{j\text{CM}} \right] \ , \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

donde $\vec{R}_{\text{CM}} = (R_{\text{CM}1}, R_{\text{CM}2}, R_{\text{CM}3})$ es el vector posición que va desde $\mathcal{O}$ a CM.

Ecuaciones de movimiento

La relación entre el momentum angular y torque de un sólido rígido es:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}$$

donde $\vec{L} = I_{\mathcal{O}}\vec{\Omega}$ con $I_{\mathcal{O}}$ el tensor de inercia medido c/r al pivote y $\vec{\Omega}$ el vector velocidad angular del cuerpo.

La segunda Ley de Newton para un sólido rígido se expresa como:

$$M_{\text{tot}}\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

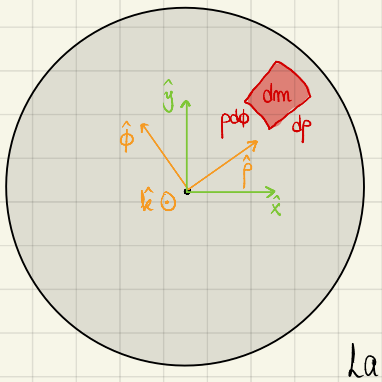
con M_{tot} la masa total, $\vec{R}$ el vector posición del centro de masa y $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$ la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sólido rígido.

Auxiliar 27

P1

c) Primero calculamos el tensor de inercia de un disco (delgado) c/r a su CM que por simetría está justo al medio. Tenemos la fórmula

$$I^{ij}_{CM} = \int (r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\, dm \qquad \text{(i indica la fila y j la columna)}$$



que está expresada en coord. cartesianas, que definimos en el dibujo con verde y que tiene origen en el CM y con $\hat{k}$ perpendicular al disco, pero por la forma del objeto nos conviene expresar el sist. $\{\hat{x},\hat{y},\hat{k}\}$ en cilíndricas $\{\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{k}\}$

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \, , \quad z = 0 \qquad (\Rightarrow r^2 = x^2+y^2+z^2 = \rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = \rho^2)$$

La masa está distribuida de forma homogénea $\Rightarrow \underbrace{\sigma}_{\text{constante}} = M/A = M/\pi R^2$, así que el diferencial de masa en coord. cilíndricas

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} d\rho\rho d\phi$$

Partamos calculando las componentes diagonales de I^{ij}_{CM}

- $I^{11}_{CM} = \int (\rho^2\delta_{11} - x_1x_1)dm = \frac{M}{\pi R^2}\iint(\rho^2 - x^2)\, d\rho\rho d\phi = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R(\rho^2 - \rho^2\cos^2\phi)d\rho\rho d\phi = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi\, d\phi\int_0^R\rho^3 d\rho = \frac{MR^2}{4}$

- $I^{22}_{CM} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R(\rho^2 - \rho^2\sin^2\phi)\, d\rho\rho d\phi = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\, d\phi\int_0^R\rho^3 d\rho = \frac{MR^2}{4}$

- $I^{33}_{CM} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R(\rho^2 - \cancel{z^2}^{\,0})\, d\rho\rho d\phi = \frac{MR^2}{2}$

noten que I_0 es simétrica siempre

Queda propuesto demostrar que los elementos fuera de la diagonal son 0, esto es común en objetos muy simétricos. También notamos que se cumple el teo. del eje perpendicular $I^{33}_{CM} = I^{11}_{CM} + I^{22}_{CM}$

$$\therefore \; I_{CM} = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix}$$

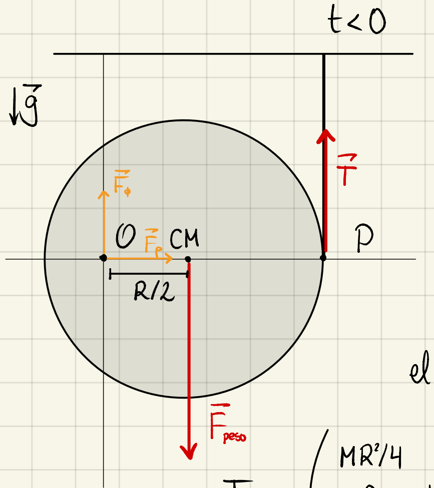
Ahora, si queremos calcular el tensor de inercia c/r a un origen O (manteniendo el mismo sist. cartesiano $\{\hat{x},\hat{y},\hat{k}\}$ que usamos para el CM, solo que trasladado sin rotar los ejes), donde el CM está a una distancia $\vec{r}_{CM} = (r_x, r_y, r_z)$ desde O, ocupamos teo. de Steiner

$$I^{ij}_O = I^{ij}_{CM} + M(r^2_{CM}\delta_{ij} - r_{CM\,i}\, r_{j\,CM})$$

que en forma matricial sería

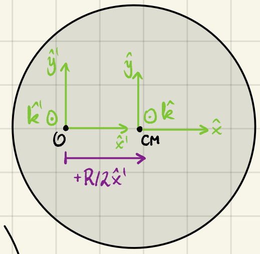
$$I_O = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_y r_x & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ -r_z r_x & -r_z r_y & r_x^2 + r_y^2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

P2



a) En la P1 ya calculamos el tensor de inercia para un disco delgado de radio R y masa M distribuida homogéneamente. Además encontramos la expresión general para hacerle Steiner al I_{CM} de este objeto, en este caso la traslación de origen es

$$\vec r_{OCM} = (\underset{r_x}{R/2}, \underset{r_y}{0}, \underset{r_z}{0})$$



(mirar el dibujo de la derecha, este $\vec r_{OCM}$ tiene que estar definido en el sist. $\{\hat x', \hat y', \hat k'\}$ que es igual al de CM, pero trasladado). Así que I_O sería

$$(*):\ I_O = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & R^2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3MR^2/4 \end{pmatrix}$$

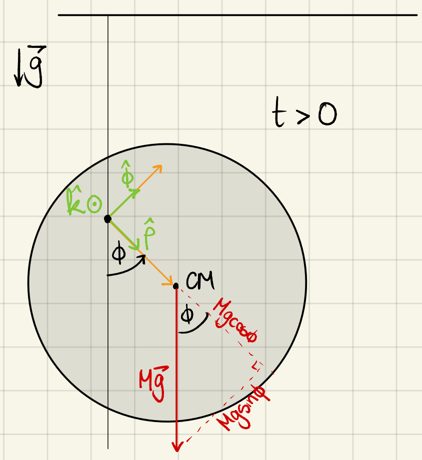
b) Para calcular la tensión de la cuerda usaremos $d\vec L/dt = \vec\tau$ usando como pivote O, de esta forma nuestra ec. no tendrá las fuerzas ejercidas por el pivote, $\vec F_\phi$ y $\vec F_\rho$. Como el disco está quieto cuando está atado a la cuerda $\vec L = \vec 0$, así que solo calculamos el torque de las fuerzas externas

$$\vec\tau = \sum_i \vec\tau_i = \vec r_1 \times \vec F_1 + \vec r_2 \times \vec F_2 = \frac{R}{2}\hat\rho \times (-Mg\hat\phi) + \frac{3R}{2}\hat\rho \times T\hat\phi = -\frac{R}{2}Mg\hat k + \frac{3R}{2}T\hat k$$

$$\therefore\ 0 = -\frac{R}{2}Mg + \frac{3R}{2}T \iff \boxed{T = \frac{Mg}{3}}$$

c) Necesitamos la ec. de movimiento, así que ocuparemos $d\vec L/dt = \vec\tau$, donde la única fuerza externa (que ejerce torque) es la gravitacional y el momentum angular se calcula como

$$\vec L = I_O \cdot \vec\Omega(t)$$



donde $\vec\Omega(t)$ es el vector velocidad angular con el que rota el sólido rígido.
Notemos que ahora tenemos una especie de péndulo que rota únicamente c/r a $\hat k$

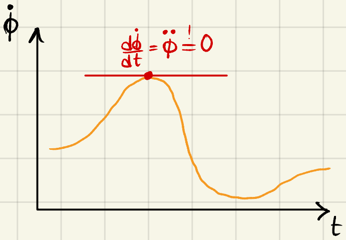
$$\Rightarrow \vec\Omega = (0, 0, \dot\phi(t))$$

Así que el momentum angular sería
$$\vec L = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3MR^2/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3MR^2\dot\phi/4 \end{pmatrix}$$

y el torque producido por la gravedad sería $\vec\tau = \frac{R}{2}\hat\rho \times (-M\vec g) = \frac{R}{2}\hat\rho \times (Mg\cos\phi\,\hat\rho - Mg\sin\phi\,\hat\phi) = -\frac{MgR}{2}\sin\phi\,\hat k$

$$\therefore\ \frac{d\vec L}{dt} = \vec\tau \iff \frac{3MR^2}{4}\ddot\phi\,\hat k = -\frac{MgR}{2}\sin\phi\,\hat k \Rightarrow \ddot\phi + \frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\phi = 0 \quad (1)$$

La velocidad angular máxima se da cuando su derivada temporal es 0, osea imponemos $\ddot{\phi}(t^*) \overset{!}{=} 0$ en la ec. de mov.



$$(1): \; 0 + \frac{2g}{3R} \sin\phi^* = 0 \Rightarrow \sin\phi^* = 0 \Rightarrow \phi^* = 0 \quad (\text{físicamente})$$

Ahora, ocupando truco de mecánica en (1) considerando $\phi(t=0) = \pi/2$ y $\dot{\phi}(t=0) = 0$

$$(1): \int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\, d\dot{\phi} = -\frac{2g}{3R} \int_{\pi/2}^{\phi} \sin\phi\, d\phi \iff \frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{2g}{3R} \cos\phi \quad (2)$$

así que evaluando (2) en $\phi^* = 0$ $\Rightarrow \frac{\dot{\phi}_{max}^2}{2} = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \cos(0) \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}_{max} = +\sqrt{\frac{4g}{3R}}}$

d) Usando torque y momentum angular no conseguimos expresar la fuerza ejercida por el pivote, así que recurrimos a segunda Ley de Newton con CM

$$M_{tot}\, \ddot{\vec{R}}_{cm} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

donde tomando como origen O con coord. cilíndricas tenemos

$$\vec{R}_{cm} = \frac{R}{2}\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{cm} = \frac{R}{2}\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{cm} = \frac{R}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{R}{2}\dot{\phi}^2\hat{\rho}$$

y luego de cortarse la cuerda las únicas fuerzas externas son: la fuerza del pivote y la gravitacional

$$M\left(\frac{R}{2}\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{R}{2}\dot{\phi}^2\hat{\rho}\right) = F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi} + Mg\cos\phi\,\hat{\rho} - Mg\sin\phi\,\hat{\phi}$$

por lo que las ecs. de mov. escalares son:

$$\hat{\rho})\; -\frac{MR}{2}\dot{\phi}^2 = F_\rho + Mg\cos\phi \qquad \hat{\phi})\; \frac{MR}{2}\ddot{\phi} = F_\phi - Mg\sin\phi \qquad \hat{k})\; 0=0$$

reemplazamos (1) y (2) en $\hat{\rho}$) y $\hat{\phi}$) para expresar las fuerzas en función del ángulo ϕ

$$\boxed{\vec{F}_{pv} = F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi} = \left[-\frac{MR}{2}\underbrace{\frac{4g}{3R}\cos\phi}_{(2)} - Mg\cos\phi\right]\hat{\rho} + \left[\frac{MR}{2}\cdot\underbrace{\left(-\frac{2g}{3R}\sin\phi\right)}_{(1)} + Mg\sin\phi\right]\hat{\phi}}$$