Auxiliar 25

SRNI IV

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

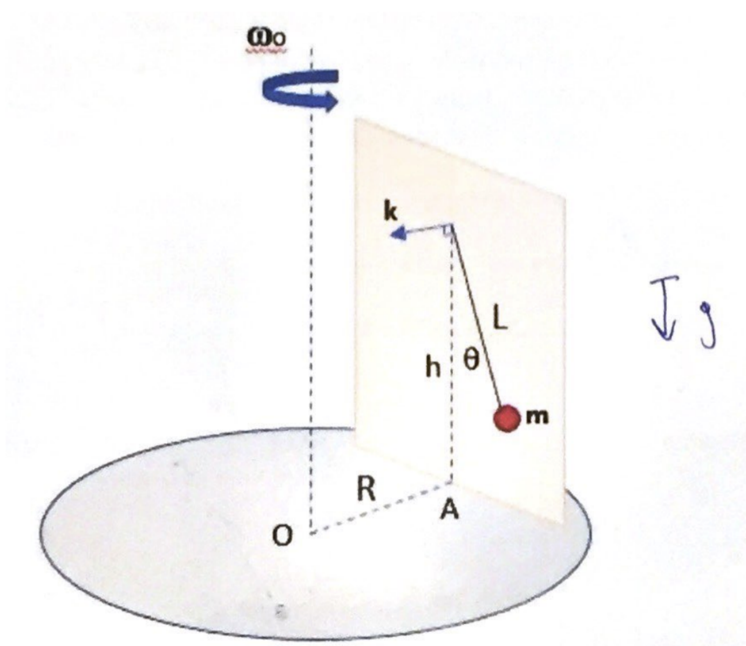
P1.-

Una pared vertical sobre un disco que gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular ω_0 constante. La pared es perpendicular a la recta OA y se encuentre a una distancia R del eje de simetría del disco. En el punto medio de la pared, a una altura h del disco, hay un pivote que sostiene un péndulo de largo L y masa m (ver figura)

a) Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo θ

b) Determine las posiciones angulares θ de equilibrio de la masa m en su movimiento relativo a la pared. Calcule el valor de ω_0^2 tal que $\theta = 0$ sea un punto de equilibrio

c) Si la plataforma rota con una velocidad angular ω_1, tal que $\omega_1^2 = 2\omega_0^2$ (con ω_0^2 del ítem b)) determine cuál es el ángulo de equilibrio estable y el periodo de pequeñas oscilaciones en torno a él



Formulario

Sistemas de referencia no inerciales

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

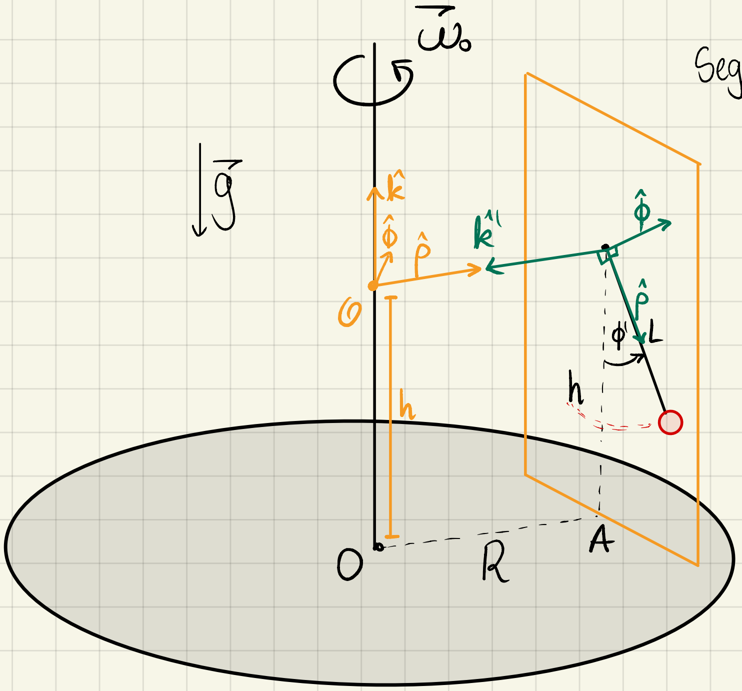
$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula;
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S';
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes **cartesianos** de S' c/r a los de S y
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Auxiliar 25

P1



Seguiremos los mismos pasos del auxiliar 24

1. Definir el sist. de S' y la posición $\vec{r}'$
2. Describir $\vec{R}$ y con ello $\mathring{\mathring{\vec{R}}}$
3. Definir la velocidad angular $\vec{\Omega}$
4. Calcular las fuerzas reales $\Sigma\vec{F}$
5. Pasar todos los vectores de S al sist. de S'
6. Calcular los términos de la fórmula maestra

(a) Como queremos la ec de mov. de ϕ', que es del sistema S', necesitaremos la ec. de mov. de S' que es la fórmula maestra

Primer paso: S' y la posición $\vec{r}'$

Notamos que si nos movemos de forma solidaria a la pared vertical, el mov. de la masa es como la de un péndulo simple común y corriente (ver Fig 2.), por lo que es conveniente definir un sist. cilíndrico (**solidario** con el movimiento del plano vertical) con origen $\mathcal{O}'$ en el origen del péndulo (a una altura h) y con $\hat{\rho}'$ apuntado a la masa.

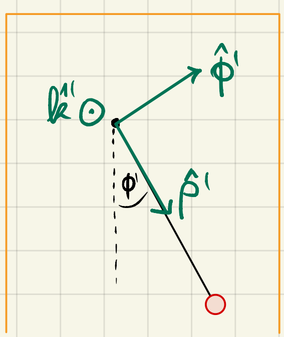


Fig 2: Vista de frente a la pared horizontal, un péndulo de toda la vida

$$\therefore \vec{r}' = L\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = R\dot{\phi}'\hat{\phi}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = R\ddot{\phi}'\hat{\phi}' - R\dot{\phi}'^2\hat{\rho}'$$

Segundo paso: Posición $\vec{R}$

Para definir $\vec{R}$ necesitamos elegir un sist. de coordenadas adecuado para "seguir" el punto $\mathcal{O}'$. Notamos que el origen $\mathcal{O}'$ sigue una trayectoria circunferencial de radio R alrededor del eje de simetría, por lo que es conveniente elegir un sist. cilíndrico con origen $\mathcal{O}$ a una altura h sobre el suelo con $\hat{\rho}$ apuntando al punto $\mathcal{O}'$, de esta forma

$$\therefore \vec{R} = R\hat{\rho} \Rightarrow \mathring{\vec{R}} = R\dot{\phi}\hat{\phi} = R\omega_0\hat{\phi} \Rightarrow \mathring{\mathring{\vec{R}}} = -R\omega_0^2\hat{\rho}$$

Tercer paso: Velocidad angular $\vec{\Omega}$

Para definir $\vec{\Omega}$ necesitamos definir un sist. cartesiano tanto para S como para S' y ver con qué velocidad angular rotan los ejes de ambos sistemas. Es sencillo ver (me dio pereza dibujarlo) que estos sist. cartesianos rotarían entre sí con una rapidez angular ω_0 (el sist. cart. de S estaría quieto en el eje de simetría y el de S' estaría pegado al plano vertical, entonces solápenlos y con las manos convénzanse que rotan con ω_0) y en la dirección de $\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = \omega_0 \hat{k}$$

Cuarto paso: Fuerzas reales

Tenemos 3 fuerzas reales (actuando directamente sobre la partícula): Fuerza peso, normal del plano vertical y la tensión de la cuerda

$$\therefore \sum_i \vec{F}_i = -mg\hat{k} + N_{z'}\hat{k}' - T\hat{\rho}'$$

Quinto paso: Relaciones entre ejes

Tenemos que pasar todo al sist. de coord. que elegimos para S', o sea hacer el paso $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\} \longrightarrow \{\hat{\rho}', \hat{\phi}', \hat{k}'\}$. En particular necesitamos pasar $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$ a S' (salen en $\ddot{\vec{R}}$, $\vec{\Omega}$ y $\vec{F}_{peso}$). Notamos por la Fig 1. que $\hat{\rho} = -\hat{k}'$ y para $\hat{k}$ solapamos los sistemas como en la Fig 3.

$$\Rightarrow \hat{k} = -\cos\phi'\hat{\rho}' + \sin\phi'\hat{\phi}'$$

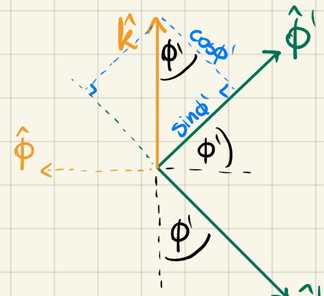


Fig 3: Descomponiendo $\hat{k}$

$$\therefore \ddot{\vec{R}} = R\omega_0^2\hat{k}' \; ; \; \vec{\Omega} = \omega_0(-\cos\phi'\hat{\rho}' + \sin\phi'\hat{\phi}') \; ; \; \vec{F}_{peso} = -mg(-\cos\phi'\hat{\rho}' + \sin\phi'\hat{\phi}')$$

Sexto paso: Calcular la fórmula maestra

Ya tenemos todo, calculemos cada término de la fórmula maestra

- $m\ddot{\vec{r}}' = mR\ddot{\phi}'\hat{\phi}' - mR\dot{\phi}'^2\hat{\rho}'$
- $\vec{F} = mg\cos\phi'\hat{\rho}' - mg\sin\phi'\hat{\phi}' + N_{z'}\hat{k}' - T\hat{\rho}'$
- $-m\ddot{\vec{R}} = -mR\omega_0^2\hat{k}'$
- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = m\omega_0(\cos\phi'\hat{\rho}' - \sin\phi'\hat{\phi}') \times \left(\omega_0(-\cos\phi'\hat{\rho}' + \sin\phi'\hat{\phi}') \times L\hat{\rho}'\right)$

$$= m\omega_0^2 L(\cos\phi'\hat{\rho}' - \sin\phi'\hat{\phi}') \times (-\sin\phi'\hat{k}') = m\omega_0^2 L(\cos\phi'\sin\phi'\hat{\phi}' + \sin^2\phi'\hat{\rho}')$$

- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\omega_0(\cos\phi'\hat{\rho}' - \sin\phi'\hat{\phi}') \times R\dot{\phi}'\hat{\phi}' = 2m\omega_0 R\cos\phi' \cdot \dot{\phi}'\hat{k}'$

▫ $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,' = \vec{0}$, por que $\frac{d}{dt}(\omega_0\hat{k}) = \vec{0}$

Juntamos todo

$$mR\ddot{\phi}'\hat{\phi}' - mR\dot{\phi}'^2\hat{\rho}' = mg\cos\phi'\hat{\rho}' - mg\sin\phi'\hat{\phi}' + N_{z'}\hat{k}' - T\hat{\rho}' - mR\omega_0^2\hat{k}' + m\omega_0^2 L(\cos\phi'\sin\phi'\hat{\phi}' + \sin^2\phi'\hat{\rho}') + 2m\omega_0 R\cos\phi'\cdot\dot{\phi}'\hat{k}'$$

y las ecs. de mov. escalares serían

$$\hat{\rho}')\quad -mR\dot{\phi}'^2 = mg\cos\phi' - T + m\omega_0^2 L\sin^2\phi'$$

$$\hat{\phi}')\quad mR\ddot{\phi}' = -mg\sin\phi' + m\omega_0^2 L\cos\phi'\sin\phi'$$

$$\hat{k}')\quad 0 = N_{z'} - mR\omega_0^2 + 2m\omega_0 R\cos\phi'\cdot\dot{\phi}'$$

donde lo que nos piden en (a) es la ec. de $\hat{\phi}')$

(b) Un punto de equilibrio en un eje se da cuando la suma de fuerzas (tanto ficticias como reales) en ese eje es 0, que por Newton es lo mismo que la aceleración de ese eje sea 0. Por lo que imponemos $\ddot{\phi}' \overset{!}{=} 0$ en $\hat{\phi}')$ y encontremos los ángulos ϕ'^* que lo cumplan

$$\hat{\phi}') \xrightarrow{\ddot{\phi}'=0} 0 = -mg\cancel{\sin\phi'^*} + m\omega_0^2 L\cos\phi'^*\cancel{\sin\phi'^*}$$ ⟵ queremos encontrar una expresión general

$$\Rightarrow 0 = -g + \omega_0^2 L\cos\phi'^* \Leftrightarrow \cos\phi'^* = \frac{g}{\omega_0^2 L} \Leftrightarrow \phi'^* = \arccos\left(\frac{g}{\omega_0^2 L}\right) \quad (*)$$

con lo que conseguimos la expresión de los ángulos de equilibrio dependiente de ω_0, tomaremos $\omega_0^2 = g/L$ para (c) (Ver extra)

(c) Tenemos que $\omega_1^2 = 2g/L$, entonces por (*) tendríamos que el nuevo punto de equilibrio está dado por

$$\phi'^* = \arccos\left(\frac{g}{2g/L\cdot L}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi/3$$

Entonces ahora tomamos $\phi' = \pi/3 + \delta\phi$ y reemplazamos en $\hat{\phi}')$

$$\Rightarrow R\delta\ddot{\phi}' = -g\sin(\pi/3+\delta\phi) + \omega_0^2 L\cos(\pi/3+\delta\phi)\sin(\pi/3+\delta\phi) \quad (☺)$$

donde

▷ $\sin(\pi/3+\delta\phi) = \sin\pi/3\cdot\cos\delta\phi' + \cos\pi/3\cdot\sin\delta\phi' = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\delta\phi' + \frac{1}{2}\sin\delta\phi'$

▷ $\cos(\pi/3+\delta\phi') = \cos\pi/3\cos\delta\phi' - \sin\pi/3\cdot\sin\delta\phi' = \frac{1}{2}\cos\delta\phi' - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\delta\phi'$

y como $|\delta\phi'| \ll 1$ hacemos Taylor

$\Rightarrow$ ▷ $\sin(\pi/3+\delta\phi') \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\delta\phi'}{2}$ $\wedge$ ▷ $\cos(\pi/3+\delta\phi') \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\phi'$

reemplazamos en $(\smile)$

$$\Rightarrow R\delta\ddot{\phi}' = -g\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{g}{2}\delta\phi' + \omega_0^2 L\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\phi'\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\delta\phi'}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{g}{2} - \frac{3}{2}\omega_0^2 L + \frac{\omega_0^2 L}{4}\right)\delta\phi' + b\cdot\cancel{\delta\phi'^2}^{\sim 0} + c$$

$$\Leftrightarrow \delta\ddot{\phi} + \frac{1}{R}\left(\frac{g}{2} + \frac{3}{2}\omega_0^2 L - \frac{\omega_0^2 L}{4}\right)\delta\phi' + c = 0$$

donde c es una cte. conocida $\therefore \omega^2 = \frac{1}{R}\left(\frac{g}{2} + \frac{5}{4}\omega_0^2 L\right) \overset{\omega_0^2 = 2g/L}{=} \frac{1}{R}\left(\frac{g}{2} + \frac{5}{4}\,2\cdot\frac{g}{L}\cdot L\right) = \frac{3g}{R}$

nuestra frecuencia de pequeños oscilaciones

Extra

Notamos de $\hat{\phi}')$ que para $\ddot{\phi}' = 0$

$$0 = -mg\sin\phi'^{*} + m\omega_0^2 L\cos\phi'^{*}\sin\phi'^{*}$$

Si $\sin\phi'^{*} = 0$ se cumple la ecuación, que es para $\phi'^{*} = 0$, pero encontraremos restricciones sobre ω_0 para que este pto. sea estable o inestable. Tomemos una pequeña oscilación en torno al 0

$$\phi' = \delta\phi'$$

y hacemos Taylor a $\hat{\phi}')$ con $\cos\phi' \approx 1 \ \wedge\ \sin\phi' \approx \delta\phi'$

$$\Rightarrow mL\delta\ddot{\phi}' = -mg\delta\phi' + m\omega_0^2 L\,\delta\phi'$$

$$\Leftrightarrow \delta\ddot{\phi}' + \left(\frac{g}{L} - \omega_0^2\right)\delta\phi' = 0$$

por lo que $\phi' = 0$ siempre será un pto de equilibrio, pero solo será estable si $g/L > \omega_0^2$