Auxiliar 25

Torque y momentum angular

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- Considere una barra horizontal de largo $3L$, que tiene en su extremo izquierdo una partícula de masa $2m$ y en el extremo derecho otra de masa m (ver figura adjunta). La barra puede girar libremente alrededor de un eje horizontal que pasa a una distancia L del extremo derecho. El sistema se encuentra en reposo, bajo la acción de un resorte de constante elástica k, que sostiene en forma vertical a la partícula de masa m.

(a) Determine la deformación inicial del resorte

(b) Calcule el periodo de pequeñas oscilaciones si se da una pequeña perturbación vertical a la partícula de masa $2m$. Realice la aproximación necesaria para la deformación del resorte

(c) Partiendo de la posición inicial en reposo, determine la máxima rapidez que alcanza la partícula $2m$ si se corta el resorte.

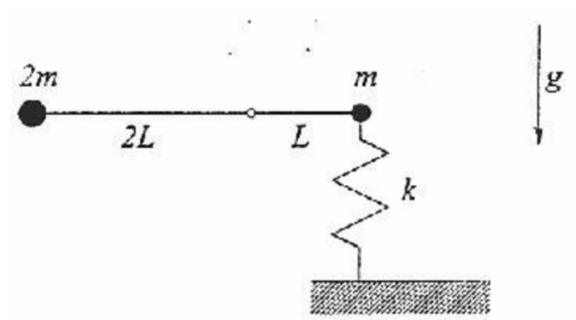


Figura 1: Barra con dos masas en los extremos y atada a un resorte ideal.

P2.- (**Buen propuesto**) Considere una estructura rígida formada por dos varas sin masa de largo $2L$ que forman una cruz simétrica como muestra la figura. En los extremos de las varas se ubican 4 partículas puntuales de masa m cada una. Si inicialmente la estructura se encuentra en reposo en su posición de equilibrio inestable ($\theta = 0°$) y se le da una pequeña perturbación que la hace volcar como se indica, se pide:

(a) Determinar los valores de $\dot{\theta}$ y de la normal en 1 para el instante justo antes de que la partícula 2 choca con la superficie (asuma que hasta antes del choque la partícula 1 no se mueve).

(b) Determine la energía mecánica total de la estructura después del choque de la partícula 2 con la superficie (asuma que después del choque la partícula 2 queda inmóvil, y la estructura comienza a rotar en torno a 2).

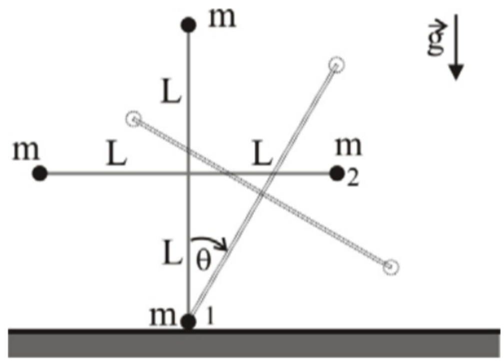
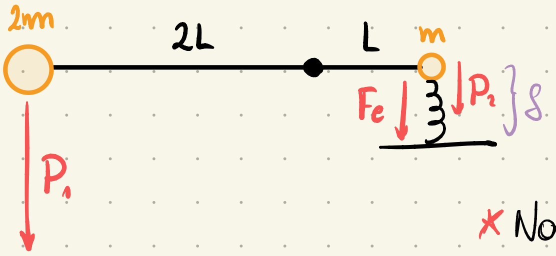


Figura 2: Cruz de barras $2L$ y masas m atadas a los extremos.

Auxiliar 25

P1

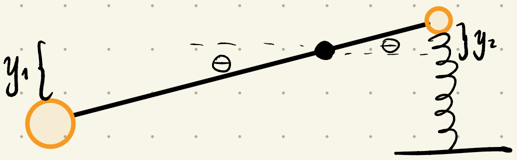


a) Como el sistema se encuentra en reposo, la sumatoria de torques debe ser 0.

$$\Rightarrow \sum \tau_{ext} = \underbrace{2mg}_{P_1} \cdot 2L - \underbrace{mg}_{P_2} \cdot L - \tau_r = 0$$

$$3mgL - \tau_r = 3mgL - k\delta_0 L = 0 \Rightarrow \delta_0 = \frac{3mg}{k}$$

* Notar que no fue necesario conocer el largo natural



b) La forma generalizada de la energía mecánica es:

$$E = \frac{1}{2}\alpha\dot{\phi}^2 + U(\phi)$$

si es que se conserva la energía ($\dot{E} = 0$)

donde las pequeñas oscilaciones están dadas por $\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(\phi_{eq})}{\alpha}}$, así que calculemos la energía potencial que considera la potencial y gravitatoria

$$\Rightarrow V(\theta) = -2mg \cdot 2L\sin\theta + mgL\sin\theta + \frac{1}{2}k(\overbrace{L\sin\theta + \delta}^{\text{deformación}})^2$$

esto se tiene porque $\theta \ll 1$

$$= -3mgL\sin\theta + \frac{1}{2}k(L\sin\theta + \delta)^2$$

derivamos: $\frac{\partial V}{\partial \theta} = -3mgL\cos\theta + k(L\sin\theta + \delta) \cdot L\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 3mgL\sin\theta + kL\cos\theta \cdot L\cos\theta - kL(L\sin\theta + \delta)\sin\theta$$

$$= 3mgL\sin\theta + kL^2\cos^2\theta - kL^2\sin^2\theta - kL\delta\sin\theta$$

evaluando en la posición de equilibrio $\theta_{eq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(0) = kL^2$$

Ahora identificamos α expresando la energía cinética

$$K = \frac{1}{2}2m(2L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 = 4mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{2}9mL^2\dot{\theta}^2$$

Por lo que la energía mecánica sería

$$E = \frac{1}{2}9mL^2\dot{\theta}^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}^2 + U(\theta)$$

así que la frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kL^2}{9mL^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 3\sqrt{\frac{m}{k}}$$

c) Ya no está la fuerza del resorte y podemos ocupar la relación

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}\sum \vec{L}$$

Calculemos $\sum \vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$, donde $\vec{v}_i \perp \vec{r}_i \Rightarrow \sum \vec{L} = \sum r_i m v_i \hat{k}$

$$\sum L = 2L \cdot 2m \cdot (2L\dot{\theta}) + Lm(L\dot{\theta}) = 9mL^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sum \vec{L}}{dt} = 9mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \sum \tau_{ext} = 2mg2L\cos\theta - mgL\cos\theta = \overbrace{3mgL\cos\theta}^{\tau} = \overbrace{9mL^2\ddot{\theta}}^{dL/dt}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{3}\frac{g}{L}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{1}{3}\frac{g}{L}\int_0^{\theta} \cos\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{3}\frac{g}{L}\sin\theta$$

y la velocidad máxima se alcanza cuando $d\dot{\theta}/dt = \ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{3}\frac{g}{L}\cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{3}\frac{g}{L}\cdot 1 \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{L}} \Rightarrow v_T = 2L\dot{\theta}_{max} = 2L\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{L}}$$

* Preguntar al correo por hints de la P2 😈