Auxiliar 24

SRNI III

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.-

Considere una caja de base rectangular (lados $2l_0$ y $4l_0$) que rota con velocidad angular constante, desconocida, respecto de un eje vertical que pasa por su vértice A como muestra la figura. Por el interior de la caja, una partícula de masa m está ligada al vértice B , mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. Se desprecia cualquier roce.

(a) Calcule la velocidad angular de la caja Ω_0 tal que la partícula tenga un punto de equilibrio estable en el punto D (ver figura), además determine el periodo de pequeñas oscilaciones con respecto a este punto.

(b) Considere el valor de Ω_0 que acaba de calcular y que la masa es soltada desde el reposo (relativo a la caja que gira) en el vértice C, calcule a que distancia de B la masa se separa de la pared BC.

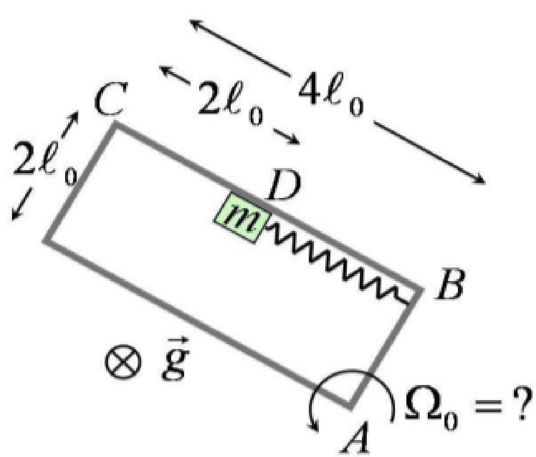


Figura 1: Caja giratoria con respecto al vértice A.

Formulario

Sistemas de referencia no inerciales

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

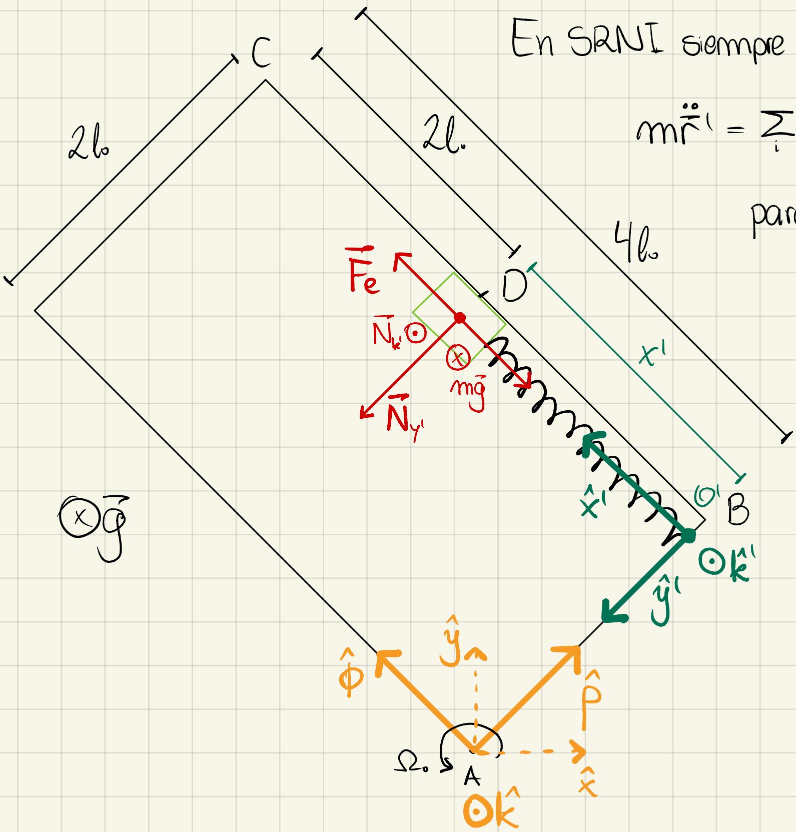
$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} \underbrace{-m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} \underbrace{-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} \underbrace{-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula;
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S';
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes **cartesianos** de S' c/r a los de S y
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Auxiliar 24

P1



En SRNI siempre ocuparemos la fórmula maestra

$$m\ddot{\vec{r}}' = \sum_i \vec{F}_i - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$

para usarla seguiremos los siguientes pasos:

1. Definir el sist. de S' y la posición $\vec{r}'$
2. Describir $\vec{R}$ y con ello $\ddot{\vec{R}}$
3. Definir la velocidad angular $\vec{\Omega}$
4. Calcular las fuerzas reales $\sum \vec{F}$
5. Pasar todos los vectores de S al sist. de S'
6. Calcular los términos de la fórmula maestra

(a) Hagamos todo el cálculo como si conociéramos Ω_0 y luego encontraremos su expresión t.q. D sea un equilibrio estable.

$\boxed{\text{Primer paso: } S' \text{ y la posición } \vec{r}'}$

Empezamos definiendo el sist. de coord. para S'. Notamos que la partícula si no se despega de la caja, tendrá un movimiento completamente contenido en la recta $\overline{BC}$, por lo que es conveniente elegir un sist. cartesiano con origen siempre en B (entonces se iría moviendo junto con este vértice) y con el eje $\hat{x}'$ en la dirección de $\overline{BC}$ apuntando hacia C. Este sist. está dibujado en verde.

Entonces, la posición de nuestra partícula, vista desde el sist. cartesiano $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{k}'\}$ de S', sería

$$\vec{r}' = x'\hat{x}'$$

y sus derivadas: $\dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\hat{x}' \implies \ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}'\hat{x}'$

$\boxed{\text{Segundo paso: Posición } \vec{R}}$

Ahora busquemos calcular $\vec{R}$. Para esto imaginamos que el origen de S', denotado por O', es una "partícula" de esta forma esta "partícula" se estaría moviendo de forma circular, con radio $2l_0$, con respecto al punto A (que está quieto siempre), por lo que para el sist. de S (el inercial) conviene ocupar un sist. de coordenadas cilíndricas con origen en A y con $\hat{\rho}$ apuntando siempre a O'. Este sist. está dibujado en naranjo

De esta forma, la posición de O' (nuestra "partícula") está descrito por

$$\vec{R} = 2l_0\hat{\rho}$$

y sus derivadas: $\dot{\vec{R}} = 2l_0\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 2l_0\ddot{\phi}\hat{\phi} - 2l_0\dot{\phi}^2\hat{\rho}$

donde identificamos que O' gira con velocidad angular $\dot{\phi} = \Omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$ al ser Ω_0 cte.

$$\therefore \ddot{\vec{R}} = -2l_0\Omega_0\hat{\rho}$$

Tercer paso: Velocidad angular $\vec{\Omega}$

La velocidad angular $\vec{\Omega}$ está definida como la velocidad angular con la que rotarían los ejes de un sist. cartesiano de S' con respecto a los ejes de un sist. cartesiano de S

El sist. cartesiano de S' es el verde y el de S es el naranjo punteado, donde si solapamos ambos sistemas en el vértice A, vemos que $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{k}'\}$ rota c/r a $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{k}\}$ con velocidad $\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{k}$

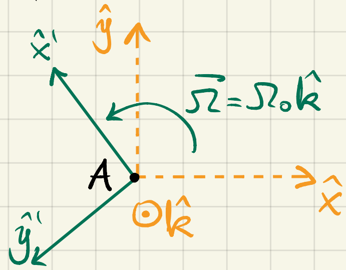


Fig 1: Giro S' c/r a S

Cuarto paso: Fuerzas reales

Solo nos faltan las fuerzas reales, identificamos que son 4: fuerza peso, dos fuerzas normales y la fuerza elástica, que podemos escribir como

$$\sum_i \vec{F}_i = -mg\hat{k}' + N_k\hat{k}' + N_{y'}\hat{y}' - k(x' - l_0)\hat{x}'$$

donde la fuerza peso se anula con la normal del fondo de la caja, $-mg\hat{k}' + N_k\hat{k}' = \vec{0}$

$$\therefore \sum_i \vec{F}_i = N_{y'}\hat{y}' - k(x' - l_0)\hat{x}'$$

Quinto paso: Relaciones entre ejes

Antes de reemplazar en la ec. maestra de SRNI, debemos pasar todos los vectores al sist. de S' $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{k}'\}$, por lo que debemos relacionar los vectores unitarios de $\{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$ con $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{k}'\}$.

En este problemas tendríamos que en **todo** el mov. se cumplen las relaciones

$$\hat{\rho} = -\hat{y}', \quad \hat{\phi} = \hat{x}', \quad \hat{k} = \hat{k}'$$

Así que reescribimos $\ddot{\vec{R}}$ como $\ddot{\vec{R}} = 2l_0\Omega_0\hat{y}'$ y $\vec{\Omega}$ como $\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{k}'$

Sexto paso: Calcular la fórmula maestra

Calculemos cada término de la fórmula maestra

- $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{x}'\hat{x}'$
- $\sum \vec{F} = N_{y'}\hat{y}' - k(x' - l_0)\hat{x}'$
- $-m\ddot{\vec{R}} = -m 2 l_0 \Omega_0 \hat{y}'$
- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\Omega_0\hat{k}'\times(\Omega_0\hat{k}'\times x'\hat{x}')$

$$= -m\Omega_0^2 x' \hat{k}'\times\hat{y}' = m\Omega_0^2 x'\hat{x}'$$

- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m\Omega_0\hat{k}'\times\dot{x}'\hat{x}' = -2m\Omega_0\dot{x}'\hat{y}'$
- $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = \vec{0}$, ya que Ω_0 es cte.

Reemplazando

$$\Rightarrow m\ddot{x}'\hat{x}' = N_{y'}\hat{y}' - k(x'-l_0)\hat{x}' - m2l_0\Omega_0\hat{y}' + m\Omega_0^2 x'\hat{x}' - 2m\Omega_0\dot{x}'\hat{y}'$$

que sería nuestra ec. de mov. vectorial, así que sacamos las "3" ecs. de mov. escalares

$\hat{x}'$) $m\ddot{x}' = -k(x' - l_0) + m\Omega_0^2 x'$ (1)

$\hat{y}'$) $0 = N_{y'} - 2ml_0\Omega_0 - 2m\Omega_0\dot{x}'$ (2)

$\hat{k}'$) $0 = 0$

Séptimo paso: Responder lo que nos piden

Ahora sí calcularemos Ω_0. Para imponer que $x' = 2l_0$ sea un pto. de equilibrio, necesitamos que la suma de fuerzas en ese eje, $\hat{x}'$, sea 0, que como $m\ddot{x}' = \sum F_{x'}$ es lo mismo que imponer $\ddot{x}' \overset{!}{=} 0$ en $x' = 2l_0$. Usamos (1)

$x' = 2l_0$

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} -k(2l_0 - l_0) + m\Omega_0^2 \cdot 2l_0$$

$$= -kl_0 + m\Omega_0^2 2l_0 \Rightarrow \boxed{\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}}$$

(b) La partícula se despegaría en el instante justo cuando $N_{y'} = 0$ (ya no hay contacto $\Leftrightarrow$ la normal es 0), reemplazando esto en (2) encontramos

$$\Rightarrow 0 = 0 - 2ml_0 - 2m\Omega_0\dot{x}' \Rightarrow \dot{x}' = l_0/\Omega_0 \quad (3)$$

o sea que la partícula se despega cuando llegue a la rapidez $\dot{x}'(t^*) = 0$, pero nosotros queremos la posición cuando esto ocurre, para esto integramos (1) con truquazo de mecánica

$$m\,\dot{x}'\frac{d\dot{x}'}{dx'} = (-k + 2m\Omega_0^2)\,x' + kl_0 \qquad \Big/ \int_{2l_0}^{x'} dx'$$

$$\Rightarrow m\int_{\dot{x}'_0=0}^{\dot{x}'} \dot{x}'\,d\dot{x}' = (2m\Omega_0^2 - k)\int_{2l_0}^{x'} x'\,dx' + kl_0\int_{2l_0}^{x'} dx'$$

$$\Leftrightarrow m\frac{\dot{x}'^2}{2} = (2m\Omega_0^2 - k)\left(\frac{x'^2}{2} - 2l_0^2\right) + kl_0\,(x' - 2l_0)$$

y evaluamos toda esta ecuación en t^* que es cuando la partícula se despega y por (3) cuando la rapidez es $\dot{x}'(t^*) = l_0/\Omega_0$.

$$\Rightarrow m\frac{(l_0/\Omega_0)^2}{2} = (2m\Omega_0^2 - k)\left(\frac{x'^2(t^*)}{2} - 2l_0^2\right) + kl_0\,(x'(t^*) - 2l_0)$$

que sería una ec. cuadrática de la forma

$$a\cdot x'^2 + b\,x' + c = 0 \Rightarrow \boxed{x'_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$