Auxiliar 21

El final

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.- **(P. Aceituno Examen 2021 Primavera)**

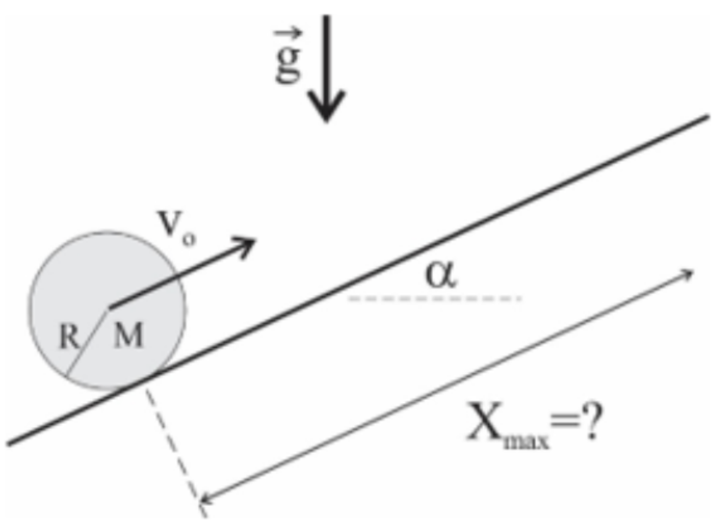
Una esfera homogénea de masa M y radio R es lanzada pendiente arriba sobre una superficie inclinada un ángulo α respecto de la horizontal, de manera que la rapidez inicial de su centro es igual a v_0.

a) Suponiendo que la esfera rueda sin resbalar sobre la superficie, determine la magnitud de la fuerza de roce estático entre la esfera y la superficie

b) Detemrine el mínimo coefciente de roce estático que asgura que la esfera no resbala

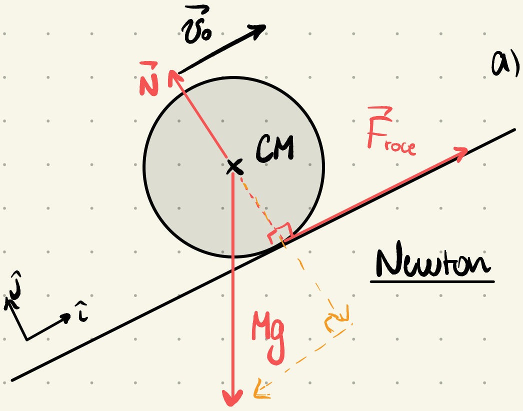
c) Si el coeficiente de roce estático tiene el valor mínimo deteminado en b), calcule la distancia X_{max} que la esfera recorre hasta que se detiene y empieza a descender

Indicación: Momento de inercia de esfera con respecto a eje que la atraviesa por su centro: $\frac{2}{5}MR^2$



Auxiliar 22

P1



a) Debido a que tenemos un problema de sólido rígido (2 ecuaciones) y las fuerzas no-conservativas no ejercen trabajo ⇒ conservación energía mecánica (1 ecuación), tenemos a nuestra disposición 3 ecuaciones, empezemos con Newton del CM

Newton

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{N} + \vec{F}_{roce} + \vec{P}$$

$$= N\hat{j} + F_r\hat{i} - Mg\sin\alpha\,\hat{i} - Mg\cos\alpha\,\hat{j}$$

$\hat{i}$) $M\ddot{X}_{CM} = F_r - Mg\sin\alpha$ (1)

$\hat{j}$) $0 = N - Mg\cos\alpha$ (2)

Y ocupando torque, donde la única fuerza que ejerce torque es el roce (las otras son aplicadas sobre el CM o son paralelas al brazo de palanca)

Torque

$$\vec{I}_{CM}\ddot{\theta} = \vec{\tau}_{CM}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{5}MR^2\ddot{\theta}\hat{k} = F_rR\hat{k} \quad (3)$$

Con $\ddot{\theta}$ la aceleración angular con la que rueda la esfera

Ahora, a priori no conocemos ni $\ddot{X}_{CM}$ ni F_r, así que pensamos ¿Hemos ocupado la condición de que la esfera no resbala?, no. Para esto usamos la expresión de la velocidad de una partícula vista desde un observador en la rampa

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'$$

donde $\vec{v}' = -R\dot{\theta}\hat{\theta}$ es la vel. de una partícula en la superficie de la esfera visto desde el CM. La condición de que no resbale es que $\vec{v} = \vec{0}$, esto quiere decir que entre la superficie de la esfera y el suelo (en el punto de contacto) la velocidad relativa entre ambos es 0, o sea, no resbala.

$$\Rightarrow \vec{0} = \dot{X}_{CM} - R\dot{\theta}\hat{i} \quad \Big\} \; \hat{\theta} \to \hat{i}$$ en el punto de contacto

$$\Leftrightarrow \dot{X}_{CM} = R\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{X}_{CM} = R\ddot{\theta} \quad (4)$$

Reemplazando en (1) y usando $\ddot{\theta}$ de (3)

$$\Rightarrow MR\ddot{\theta} = F_r - Mg\sin\alpha$$

$$\Rightarrow MR\left(-\frac{5}{2}\frac{F_r}{MR}\right) = F_r - Mg\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow F_r\left(1+\frac{5}{2}\right)=Mg\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow F_r=\frac{2}{7}Mg\sin\alpha$$

b) Tenemos la condición de la desigualdad para el roce estático

$$\left|\sum_i \vec{F}_i\right|\leq \mu N$$

donde la única fuerza actuando en el punto de contacto es el roce $\Rightarrow \sum_i F_i = F_r$

$$\Rightarrow |\vec{F}_r|\leq \mu Mg\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{7}Mg\sin\alpha \leq \mu Mg\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{7}\tan\alpha\leq\mu \Rightarrow \mu_{min}=\frac{2}{7}\tan\alpha$$

c) Como se cumple que no resbala, tenemos la conservación de energía, así que utilizemos nuestra última ecuación

Energía

$$K_0+U_0=K_f+U_f$$

donde digamos que parte con $U_0=0$ y $K_0=K_{0,cm}+\frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}_0^2=\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\left(\frac{v_0}{R}\right)^2$

$$\Rightarrow E_0=\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{5}Mv_0^2=\frac{7}{10}Mv_0^2$$

y en la altura máxima $K_f=0$ y $U_f=Mgh_{max}$

$$\Rightarrow \frac{7}{10}Mv_0^2=Mgh_{max}$$

$$\Leftrightarrow h_{max}=\frac{7v_0^2}{10g}$$

y tenemos la relación $\sin\alpha=\frac{h_{max}}{X_{cm,max}} \Rightarrow X_{max}=\frac{7v_0^2}{10g}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$