Auxiliar 22

Pre Control 2

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- **Energía, trabajo y pequeñas oscilaciones** (EXPRIMIENDO EL AUX ANTERIOR)

Sobre una superficie horizontal se encuentran dos partículas de masas m y $2m$ unidas por un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En la condición inicial el resorte está en su largo natural, la partícula derecha (masa m) se mueve con rapidez v_0 hacia la izquierda y la otra partícula (masa $2m$) está en reposo.

(a) Si los coeficientes de roce estático y cinético entre las partículas y la superficie tienen los valores μ_e y μ_c, respectivamente, se pide determinar el mayor valor que puede tener v_0 tal que la partícula de la izquierda nunca se mueva.

(b) Si los coeficientes de roce estático y cinético son ambos nulos determine el mínimo largo que el resorte alcanza en el movimiento resultante del sistema (considere en este caso que v_0 es dato).

(c) (**Nueva pregunta**) Calcule la frecuencia con la que oscila el resorte con las condiciones de (b).

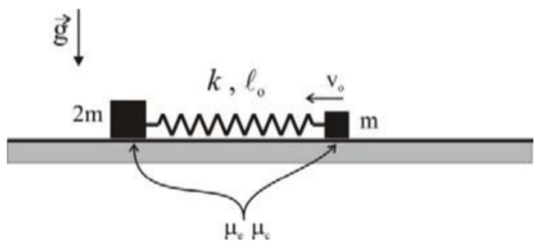


Figura 1: Sistema de dos partículas con un resorte.

P2.- **Energía y fuerzas conservativas**

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 conectadas por un resorte ideal sin masa, de constante elástica k y largo natural l_0, como muestra la figura. El sistema se mantiene **siempre** vertical con m_1 sobre m_2.

(a) Determine el valor mínimo que debe tener la compresión inicial del resorte δ_0, para que al liberar m_1 desde el reposo, la partícula de masa m_2 se separe de la superficie.

(b) Si la compresión inicial del resorte es del doble del valor encontrado en la primera parte ($2\delta_0$), determine la máxima altura que alcanza el centro de masa del sistema conformado por las dos partículas.

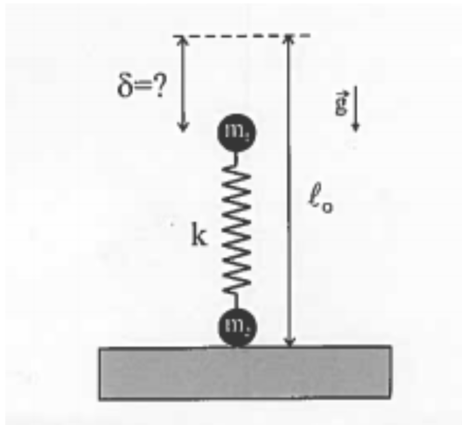


Figura 2: Sistema de dos partículas con un resorte, pero vertical.

P3.- **Fuerzas centrales y órbitas**

La NASA detecta un peligrosísimo cometa de masa $\beta \cdot m$ ($\beta = 1/\sqrt{2}$) que se mueve en órbita parabólica en torno al Sol y que se aproxima a chocar con la Tierra de masa m que orbita el Sol, de masa $M_\odot$, siguiendo una trayectoria circular de radio R. El choque ocurre cuando el cometa está pasando por el punto más cercano al Sol, moviéndose en la misma dirección que el planeta. Luego del impacto ambos cuerpos quedan unidos, formando un nuevo planeta apocalíptico de masa $m_{tot} = m + \beta \cdot m$. En el impacto se conserva el momentum lineal, pero no la energía cinética.

Indicación: Considere que tanto la Tierra como el cometa solo se ve afectado gravitacionalmente por el Sol, ya que $M_\odot >> m$.

(a) Determine la velocidad y la energía mecánica de los cuerpos pegados **justo** luego del impacto, indique qué tipo de órbita seguiría.

(b) Calcule la máxima distancia al Sol luego del impacto.

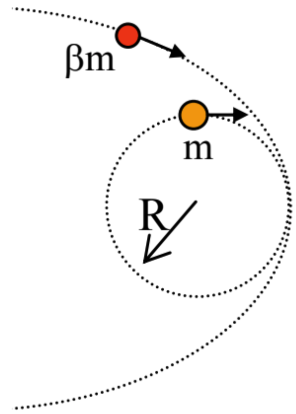


Figura 3: La Tierra en un órbita circular alrededor del Sol y un cometa con trayectoria parabólica.

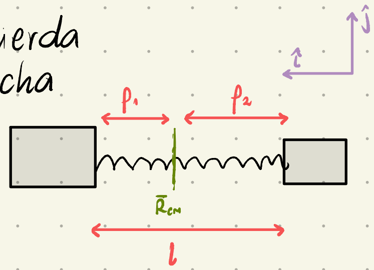
Auxiliar 22

P1

* La parte (a) y (b) están en la pauta del aux anterior.

Usamos el centro de masa como sist. referencia inercial (se mueve con velocidad cte).
Definimos las posiciones de las partículas c/r al CM como

ρ_1, para la partícula de la izquierda
ρ_2, " " derecha



La ecuación de mov. para la partícula de la izquierda es

$$2m\ddot{\vec{\rho}}_1 = \vec{F}_e = -k(l-l_0)\hat{\imath}$$

donde l es el largo del resorte que va cambiando $\Rightarrow l = \rho_1 + \rho_2$

$$\Rightarrow 2m\ddot{\rho}_1 = -k(\rho_1+\rho_2-l_0) \quad (1)$$

Como nuestro sist. es c/r al CM, podemos definir que $\vec{R}_{CM} \overset{!}{=} \vec{O}$

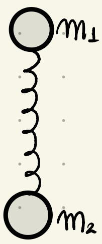
$$\Leftrightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{3m}(-2m\rho_1 + m\rho_2) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\rho_2}{2}$$

por lo que (1) $\rightarrow 2m\ddot{\rho}_1 = -k(\rho_1 + 2\rho_1 - l_0) \Rightarrow \ddot{\rho}_1 + \overbrace{\frac{3k}{2m}}^{\omega_0^2}\rho_1 = \frac{k\,l_0}{2m}$

donde identificamos la frecuencia angular $\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$

P2

(a) Analizamos la ec. de movimiento para m_2 en el momento en el que va a despegar para calcular el estiramiento del resorte cuando esto suceda.



Sobre la masa m_2 actúa la fuerza normal, fuerza peso y la fuerza elástica, esta última cambia de signo cuando pasa de estar comprimido a cuando está está estirado, nos interesa este último caso

$$\Rightarrow m_2\ddot{z}_2 = N - m_2 g + k\delta_f$$

con δ_f el estiramiento en el punto que se separa la masa del suelo, en este punto la aceleración y la normal es 0 (mismo argumento que en el P1 Aux 21)

$$\Rightarrow 0 = -m_2 g + k\delta_f \Rightarrow \delta_f = \frac{m_2 g}{k}$$

Conocemos el estiramiento final y queremos conocer el inicial, como no hay fuerzas disipativas, se conserva la energía mecánica, que considera las energías cinéticas, la energía potencial gravitatoria y la elástica.

▷ Energía inicial: – Cinética: Ambos parten del reposo
– Gravitatoria: Tomamos el 0 en el suelo, por lo que sólo la m_1 tiene
$$\Rightarrow U_g = m_1 g z_1 = m_1 g(l_0 - \delta_0)$$
– Elástica: Parte con compresión δ_0
$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2} k \delta_0^2$$

▷ Energía final: – Cinética: Para que δ_0 sea la compresión **mínima** necesaria, ambas partículas deben acabar en reposo, o sino δ_0 se pasó con la compresión inicial
– Gravitatoria: La masa m_1 se desplaza hacia arriba $\delta_0 + \delta_f$
$$\Rightarrow U_g = m_1 g(l_0 + \delta_f)$$
– Elástica: El resorte acaba con un estiramiento δ_f
$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2} k \delta_f^2$$

Por conservación de la energía $E_0 = E_f$
$$\Leftrightarrow m_1 g(l_0 - \delta_0) + \frac{1}{2} k \delta_0^2 = m_1 g(l_0 + \delta_f) + \frac{1}{2} k \delta_f^2$$
que es una ecuación cuadrática y tiene solución (En un control deben resolverlo)

(b) Ahora la compresión inicial es $2\delta_0$, por lo que no sólo m_2 se separará del suelo cuando el estiramiento del resorte sea δ_f, calculado anteriormente, (se mantiene esto), sino que la masa m_1 tendrá una velocidad hacia arriba, que denominamos v_1

Usamos conservación de la energía donde la energía "final" es cuando m_2 se separa del suelo con velocidad v_2 debido al resorte
$$\Rightarrow m_1 g(l_0 - 2\delta_0) + \frac{1}{2} k(2\delta_0)^2 = m_1 g(l_0 + \delta_f) + \frac{1}{2} k \delta_f^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$
Donde se conoce δ_0 y δ_f, por lo que se puede despejar v_1 en función de valores conocidos

Cuando se separa la masa m_2 utilizamos el centro de masa que no considera fuerzas externas (fuerza del resorte), así que sólo consideraríamos la fuerza gravitatoria
$$\Rightarrow M \ddot{y}_{cm} = -Mg \Rightarrow \ddot{y}_{cm} = -g \Rightarrow \dot{y}_{cm} = \dot{y}_{cm,0} \cdot t - gt^2$$
con $\dot{y}_{cm,0}$ la velocidad inicial del CM que calculamos como
$$\dot{y}_{cm,0} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_{i,0} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot 0) = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$
$$\Rightarrow \dot{y}_{cm}(t) = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} t - gt^2$$
para calcular la posición más alta, sabemos que en ese punto $\dot{y}_{cm}(t^*) = 0$
$$\Rightarrow \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{g} = t^*$$
integrando otra vez $\dot{y}_{cm} \Rightarrow y_{cm}(t) = y_{cm,0} + \dot{y}_{cm,0} \cdot t - g\frac{t^2}{2}$

donde $y_{cm,0}$, la posición inicial, es $y_{cm,0} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_{i,0} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1(l_0+\delta_f)+m_2\cdot 0)$
$$= \frac{m_1(l_0+\delta_f)}{m_1+m_2}$$

Así que la altura más alta se da en $y_{cm}(t^*)$

$$\Rightarrow y_{cm}(t^*) = \frac{m_1(l_0+\delta_f)}{m_1+m_2} + \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} t^* - g\frac{t^{*2}}{2}$$

P3

(a) Por conservación del momentum lineal

$$m v_T + \beta m v_c = m(1+\beta) v$$

justo antes del impacto

con v la velocidad del nuevo cuerpo, por lo que debemos calcular v_T y v_c.
Como el cometa sigue una trayectoria parabólica, la energía mecánica de ese cuerpo es 0

$$\Rightarrow E_c = -\frac{G(\beta m)M_\odot}{R} + \frac{1}{2}\beta m v_c^2 = 0 \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R}}$$

y para la tierra tenemos la ec. de mov.

$$m\left((\cancel{\ddot\rho} - \rho\dot\phi^2)\hat\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\phi)\hat\phi\right) = -\frac{GmM_\odot}{\rho^2}\hat\rho$$

órbita circular

$$\Rightarrow \hat\rho)\ \rho\dot\phi^2 = \frac{GM_\odot}{\rho^2} \Leftrightarrow \frac{v_T^2}{\rho} = \frac{GM_\odot}{\rho^2}$$

En el punto de choque: $\frac{v_T^2}{R} = \frac{GM_\odot}{R^2} \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$, con lo que calculamos v

$$\Rightarrow v = \frac{v_T + \beta v_c}{1+\beta} = \frac{2}{1+1/\sqrt2}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$$

por lo que la energía después del choque es

$$E = \frac{1}{2}m_{tot}v^2 - \frac{GM_{tot}M_\odot}{R} = \frac{1}{2}m\cancel{(1+1/\sqrt2)}\frac{4}{(1+1/\sqrt2)^{\cancel{2}}}\frac{GM_\odot}{R} - \frac{Gm(1+1/\sqrt2)M_\odot}{R}$$

$$= \frac{GmM_\odot}{R}\left(\frac{2}{1+1/\sqrt2} - (1+1/\sqrt2)\right)$$

$$= \frac{GmM_\odot}{R}\left(\frac{2-1-2/\sqrt2-1/2}{1+1/\sqrt2}\right) = \frac{GmM_\odot}{R}\left(\frac{1/2-\sqrt2}{1+1/\sqrt2}\right)$$

como $1/2 < \sqrt2 \Rightarrow E<0$, así que la órbita es elíptica

(b) Luego del impacto se conserva el momentum angular ($l = m_{tot}\rho^2\dot\phi$), así que consideramos el momentum justo después del impacto y el momentum en el punto más lejano, donde en ambos posiciones solo hay velocidad angular, la velocidad radial es 0 al ser los semiejes de la elipse.

$$\Rightarrow m_{tot} R v = m_{tot} R_{max} v_f$$

$$\Rightarrow v_f = v\,\frac{R}{R_{max}}$$

nos falta una ec., por lo que consideramos que se conserva la energía mecánica

$$\Rightarrow E(\rho = R) = E(\rho = R_{máx})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_{TOT} v^2 - \frac{G m_{TOT} M_\odot}{R} = \frac{1}{2} m_{TOT} v_f^2 - \frac{G m_{TOT} M_\odot}{R_{máx}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+1/\sqrt{2})\frac{4}{(1+1/\sqrt{2})^2}\frac{GM_\odot}{R} - \frac{G(1+1/\sqrt{2})M_\odot}{R} = \frac{1}{2}(1+1/\sqrt{2})v_f^2 - \frac{G(1+1/\sqrt{2})M_\odot}{R_{máx}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+1/\sqrt{2}}\frac{\cancel{GM_\odot}}{R} - \frac{\cancel{G}(1+1/\sqrt{2})\cancel{M_\odot}}{R} = \frac{1}{2}(1+1/\sqrt{2})\frac{R^2}{R_{máx}^2}\frac{4}{(1+1/\sqrt{2})^2}\frac{\cancel{GM_\odot}}{R} - \frac{\cancel{G}(1+1/\sqrt{2})\cancel{M_\odot}}{R_{máx}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{R}{R_{má}}\right)^2 \frac{2}{R(1+1/\sqrt{2})} - \frac{1+1/\sqrt{2}}{R_{má}} \qquad / \cdot R$$

$$\Leftrightarrow -c = \left(\frac{R}{R_{max}}\right)^2 \cdot a + \left(\frac{R}{R_{má}}\right)\cdot b$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

matraqueando se obtiene que $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm (4/(1+1/\sqrt{2})^2 - 1)}{4/(1+1/\sqrt{2})^2}$

$$= \left[1 \pm \left(\frac{4-(1+1/\sqrt{2})^2}{(1+1/\sqrt{2})^2}\right)\right] \cdot \frac{(1+1/\sqrt{2})^2}{4}$$

$$= \frac{(1+1/\sqrt{2})^2 \pm (4-(1+1/\sqrt{2})^2)}{4}$$

donde notamos que si tomamos el signo $+ \Rightarrow x_1 = 1 = \dfrac{R}{R_{max}} \Rightarrow R_{máx} = R$, tomando el signo negativo $\Rightarrow x_2 = \dfrac{2(1+\sqrt{2}+1/2)-4}{4} = \dfrac{-2+2\sqrt{2}+1}{4} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{4} = \dfrac{R}{R_{max}}$

$$\Rightarrow R_{má} = R\left(\frac{4}{2\sqrt{2}-1}\right) > R$$