Auxiliar 21

SRNI II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi, Claudia San Martín

P1.-

Considere una caja de base rectangular (lados $2l_0$ y $4l_0$) que rota con velocidad angular constante, desconocida, respecto de un eje vertical que pasa por su vértice A como muestra la figura. Por el interior de la caja, una partícula de masa m está ligada al vértice B , mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. Se desprecia cualquier roce.

a) Calcule la velocidad angular de la caja Ω_0 tal que la partícula tenga un punto de equilibrio estable en el punto D (ver figura), además determine el periodo de pequeñas oscilaciones con respecto a este punto.

b) Considere el valor de Ω_0 que acaba de calcular y que la masa es soltada desde el reposo (relativo a la caja que gira) en el vértice C, calcule a que distancia de B la masa se separa de la pared BC.

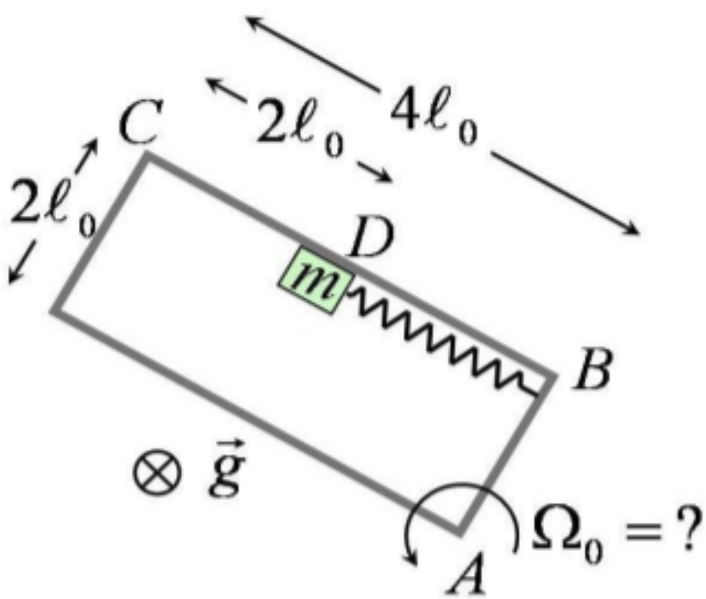


Figura 1: Caja giratoria con respecto al vértice A.

P2.-

Una cuña de ángulo α respecto de la horizontal se ubica sobre una plataforma que rota con velocidad angular constante Ω respecto de un eje vertical que pasa por un punto P, como muestra la figura. Una partícula de masa m es liberada sobre la cuña partiendo su movimiento desde el reposo relativo a la cuña y su movimiento es descrito con respecto al sistema móvil $S' = \{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ indicado en la figura, cuyo origen se ubica en la posición inicial de la partícula sobre la cuña. Considere en este problema que pueden despreciarse todas las fuerza inerciales **excepto la fuerza de Coriolis**. Se pide:

a) Escribir la ecuación de movimiento de la partícula en sus 3-componentes x', y', z' del sistema de referencia móvil S'

b) Resolver las ecuaciones, encontrando $x'(t)$ e $y'(t)$. Ver indicación de más abajo

c) Esquematizar la trayectoria de la partícula sobre la cuña. Determinar el máximo descenso y la máxima rapidez (relativa) de la partícula en su movimiento

Indicación: La ecuación diferencial $\dddot{u} = A - \omega_0^2 \dot{u}$, con A y ω_0 constantes, tiene por solución general:

$$u(t) = \frac{A}{\omega_0^2} t + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + C_3,$$

donde las constantes C_i se determinan según condiciones iniciales $u(0)$, $\dot{u}(0)$, $\ddot{u}(0)$

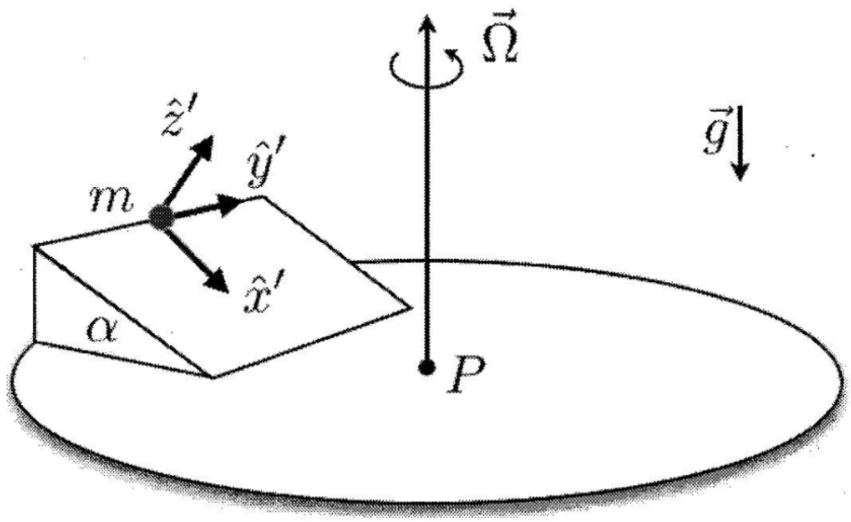


Figura 2: Plataforma giratoria

Formulario

Sistemas de referencia no inerciales

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

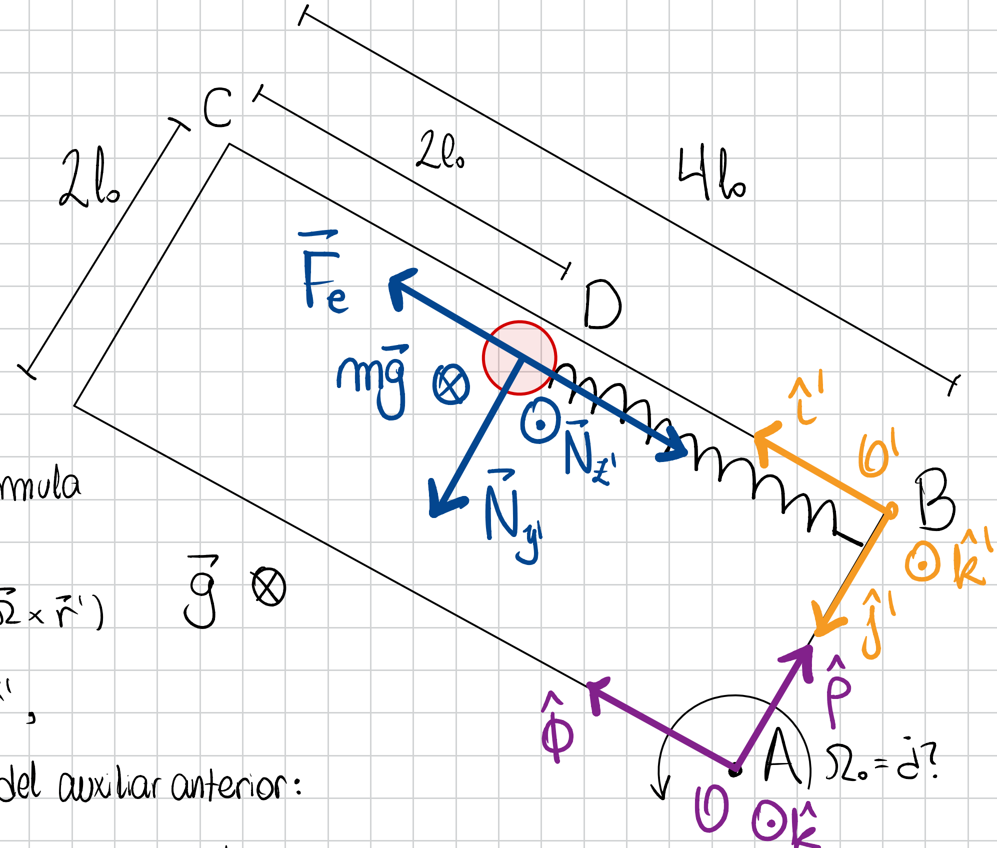
$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} \underbrace{-m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} \underbrace{-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{\text{centrífuga}} \underbrace{-2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula;
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S';
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes **cartesianos** de S' c/r a los de S y
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Auxiliar 21

P1



a) Nos gustaría ocupar el sistema $\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ cartesiano centrado en O', sin embargo este sist. se mueve de forma no inercial, por que está girando c/r a A.

No obstante, podemos ocupar $\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ si es que ocupamos la fórmula maestra

$$m\ddot{\vec{r}}' = \sum_i \vec{F}_i - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}',$$

así que ocupemos los mismos pasos del auxiliar anterior:

- ▷ Definir el sistema S' y la posición $\vec{r}'$, junto con sus derivadas
- ▷ Expresar $\vec{R}$ y derivarlo dos veces
- ▷ Definir la velocidad angular $\vec{\Omega}$
- ▷ Calcular las fuerzas reales $\vec{F}_i$
- ▷ Pasar todos los vectores de S al sistema S'
- ▷ Calcular cada término de la fórmula maestra

▷ 1er paso: S' y $\vec{r}'$

Notamos que en el sistema $S' = \{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ la partícula solo se mueve hacia atrás y a delante en el eje $\hat{\imath}'$. Digamos que la partícula se encuentra a una distancia x' en $\hat{\imath}'$, entonces

$$\vec{r}' = x'\hat{\imath}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\hat{\imath}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}'\hat{\imath}'$$

▷ 2do paso: $\vec{R}$

Nuestro sistema inercial será $S = \{\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}\}$ cilíndrico y centrado en A, además definamos $\hat{\rho}$ t.q. siempre apunte a B.

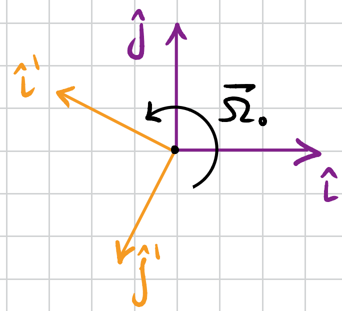
La distancia $\overline{OO'}$ es igual a $\overline{AB} = 2l_0$ cte., en la dirección de $\hat{\rho}$, entonces

$$\vec{R} = 2l_0\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = 2l_0\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -2l_0\dot{\phi}^2\hat{\rho} + 2l_0\ddot{\phi}\hat{\phi},$$

pero en este caso tenemos que $\dot{\phi} = \Omega_0$ cte. $\Rightarrow \ddot{\phi} = 0$, así que

$$\ddot{\vec{R}} = -2l_0\Omega_0^2\hat{\rho}$$

▷ 3er paso: $\vec{\Omega}$



Para definir $\vec{\Omega}$ tenemos que dibujar sist. cartesianos fijados en O y O', y solaparlos, como en la figura.
Notamos que $\{\hat{\imath}', \hat{j}'\}$ rota con rapidez angular Ω_0 c/r a $\{\hat{\imath}, \hat{j}\}$, y el eje de giro es $\hat{k} = \hat{k}'$, entonces

$$\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{k}'$$

▷ 4to paso: $\vec{F}_i$

Tenemos 4 fuerzas reales actuando sobre la partícula:

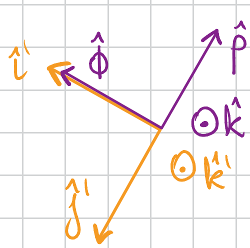
- ▷ Elástica: $\vec{F}_e = -k(x' - l_0)\hat{\imath}'$
- ▷ Peso: $m\vec{g} = -mg\hat{k}'$
- ▷ Normal pared $\overline{BC}$: $\vec{N}_{y'} = N_{y'}\hat{j}'$
- ▷ Normal base: $\vec{N}_{z'} = N_{z'}\hat{k}'$

así que la suma de todas estas contribuciones es:

$$\sum_i \vec{F}_i = -k(x' - l_0)\hat{\imath}' - mg\hat{k}' + N_{y'}\hat{j}' + N_{z'}\hat{k}'$$

▷ 5to paso: S a S'

Notamos que tenemos todas las expresiones en el sist. $\{\hat{\imath}', \hat{j}', \hat{k}'\}$, excepto $\ddot{\vec{R}}$ que está en función de $\hat{\rho}$



En este caso es sencillo, porque solapando los sistemas (como en la fig.) vemos que tenemos las relaciones

$$\hat{\rho} = -\hat{j}', \quad \hat{\phi} = \hat{\imath}', \quad \hat{k} = \hat{k}'$$

así que: $\ddot{\vec{R}} = 2l_0\Omega_0^2\hat{j}'$

▷ 6to paso: Ec. maestra

Ya con todas las expresiones en la base $\{\hat{\imath}', \hat{j}', \hat{k}'\}$, calculemos cada término de la ec. maestra

- $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{x}'\hat{\imath}'$

- $\sum_i \vec{F}_i = -k(x'-l_0)\hat{\imath}' - mg\hat{k}' + N_{y'}\hat{\jmath}' + N_{z'}\hat{k}'$

- $m\ddot{\vec{R}} = 2l_0 m\Omega_0^2\hat{\jmath}'$

- $m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = m\Omega_0\hat{k}'\times(\Omega_0\hat{k}'\times x'\hat{\imath}')$

$$= mx'\Omega_0^2\cdot(\hat{k}'\times\hat{\jmath}')$$

$$= -mx'\Omega_0^2\hat{\imath}'$$

- $2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\Omega_0\hat{k}'\times\dot{x}'\hat{\imath}'$

$$= 2m\dot{x}'\Omega_0\hat{\jmath}'$$

- $m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = \vec{0}$, ya que Ω_0 es cte.

así que la ec maestra quedaría como:

$$m\ddot{x}'\hat{\imath}' = -k(x'-l_0)\hat{\imath}' - mg\hat{k}' + N_{y'}\hat{\jmath}' + N_{z'}\hat{k}' - 2l_0 m\Omega_0^2\hat{\jmath}' + mx'\Omega_0^2\hat{\imath}' - 2m\dot{x}'\Omega_0\hat{\jmath}'$$

y las EoMs escalares serían

$\hat{\imath}'$) $m\ddot{x}' = -k(x'-l_0) + mx'\Omega_0^2$

$\hat{\jmath}'$) $0 = N_{y'} - 2l_0 m\Omega_0^2 - 2m\dot{x}'\Omega_0$

$\hat{k}'$) $0 = -mg + N_{z'}$

Ahora podemos responder a las preguntas. El punto de equilibrio (relativo) se da para $\ddot{x}'=0$ y necesitamos que se de en el punto D, o sea $x'=2l_0$. Usamos $\hat{\imath}'$)

$$\Rightarrow 0 = -k(2l_0 - l_0) + m2l_0\Omega_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega_0 = +\sqrt{\frac{k}{2m}}}$$

Para calcular pequeñas oscilaciones reordenemos $\hat{\imath}'$)

$$\ddot{x}' + \left(\frac{k}{m} - \Omega_0^2\right)x' = \frac{kl_0}{m}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}' + \frac{k}{2m}x' = \frac{kl_0}{m}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u} + \frac{k}{2m}u = 0, \text{ donde } u = x' - 2l_0$$

donde encontramos la EDO de un M.A.S., así que la frecuencia de oscilación es:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{2m}}$$

b) Integremos la ec. de i')

$$\dot{x}'\frac{d\dot{x}'}{dx'} = -\frac{k}{2m}x' + \frac{kl_0}{m} \quad / \int_{4l_0}^{x'} dx'$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{x}'} \dot{x}' d\dot{x}' = -\frac{k}{2m}\int_{4l_0}^{x'} x' dx' + \frac{kl_0}{m}\int_{4l_0}^{x'} dx'$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}'^2 = -\frac{k}{2m}\left(x'^2 - 16l_0^2\right) + 2\frac{kl_0}{m}\left(x' - 4l_0\right) \quad (1)$$

De j') sabemos que la partícula se despega en $N_{y'} = 0$, o sea

$$0 = -2l_0 m \Omega_0^2 - 2m\dot{x}'\Omega_0$$

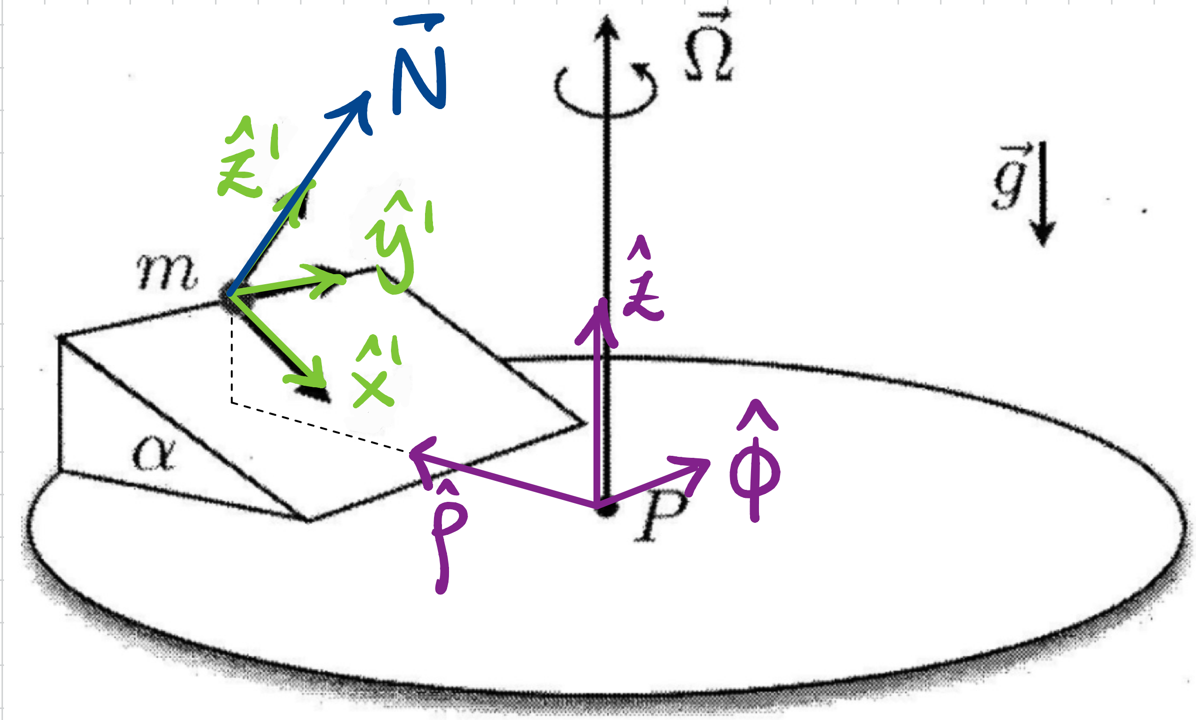
$$\Leftrightarrow \dot{x}' = \frac{l_0}{\Omega_0},$$

que sería la rapidez a la que la masa se despega, que al reemplazar en (1)

$$\frac{l_0^2}{\Omega_0^2} = -\frac{k}{2m}\left(x'^2 - 16l_0^2\right) + 2\frac{kl_0}{m}\left(x' - 4l_0\right)$$

que es una ec. cuadrática para x' de donde podemos encontrar la posición.

P2



Debido a las indicaciones del enunciado, ahora la ec. maestra sería:

$$m\ddot{\vec{r}}' = \sum_i \vec{F}_i - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Ocuparemos los mismos pasos de antes.

▷ 1^er^ paso: S' y $\vec{r}'$

Ocupamos el sistema S' impuesto. Tendríamos que la posición de la partícula es

$$\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}'$$

▷ 2^do^ paso: $\vec{R}$

Debido al movimiento circular de la rampa, conviene definir nuestro sistema inercial S como un sist. cilíndrico con $\hat{\rho}$ apuntando en el plano $\hat{x}'$-$\hat{z}'$ (ver figura)

Sin embargo, despreciaremos la contribución de $\ddot{\vec{R}}$. Esto lo pueden pensar como

$$\vec{R} = R\hat{\rho} + h\hat{k} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\Omega^2\hat{\rho}$$

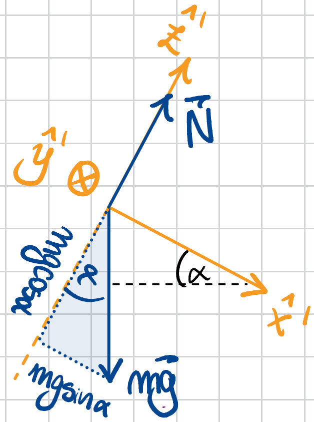
donde $\ddot{\vec{R}} \approx \vec{0}$ si $R \ll 1$.

▷ 3er paso: $\vec{\Omega}$

Solapando dos sist. cartesianos de O' y O es fácil notar que hay un Ω no nulo, en particular es

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$$

▷ 4to paso: $\vec{F}_i$

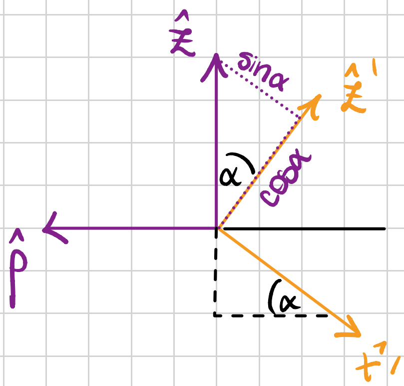


Solo hay fuerza normal y peso, que en el sist. $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ serían:

▷ Normal: $\vec{N} = N\hat{z}'$

▷ Peso: $m\vec{g} = mg\sin\alpha\,\hat{x}' - mg\cos\alpha\,\hat{z}'$

▷ 5to paso: S a S'



Lo único que tenemos que pasar a S' es $\vec{\Omega}$.
Ocupando el dibujo de la derecha

$$\hat{z} = -\sin\alpha\,\hat{x}' + \cos\alpha\,\hat{z}'$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = -\Omega\sin\alpha\,\hat{x}' + \Omega\cos\alpha\,\hat{z}'$$

▷ 6to paso: Ec. maestra

Reemplacemos todo en nuestra nueva ec. maestra

- $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{x}'\hat{x}' + m\ddot{y}'\hat{y}'$
- $\sum_i \vec{F}_i = N\hat{z}' + mg\sin\alpha\,\hat{x}' - mg\cos\alpha\,\hat{z}'$
- $2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\Omega\left(-\sin\alpha\,\hat{x}' + \cos\alpha\,\hat{z}'\right)\times\left(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}'\right)$

$$= 2m\Omega\left(-\dot{y}'\sin\alpha\,\hat{z}' + \dot{x}'\cos\alpha\,\hat{y}' - \dot{y}'\cos\alpha\,\hat{x}'\right)$$

juntando todo

$$m\ddot{x}'\hat{x}' + m\ddot{y}'\hat{y}' = N\hat{z}' + mg\sin\alpha\,\hat{x}' - mg\cos\alpha\,\hat{z}' + 2m\Omega\dot{y}'\cos\alpha\,\hat{x}' - 2m\Omega\dot{x}'\cos\alpha\,\hat{y}' + 2m\Omega\dot{y}'\sin\alpha\,\hat{z}'$$

y las ec. escalares son:

$\hat{x}'$) $m\ddot{x}' = mg\sin\alpha + 2m\Omega\dot{y}'\cos\alpha$

$\hat{y}'$) $m\ddot{y}' = -2m\Omega\dot{x}'\cos\alpha$

$\hat{z}'$) $0 = N - mg\cos\alpha + 2m\Omega\dot{y}'\sin\alpha$

b) Queremos encontrar las soluciones $x'(t)$ y $y'(t)$, pero $\hat{x}')$ y $\hat{y}')$ son EDOs acopladas. Derivemos la EDO $\hat{x}')$

$$\dddot{x}' = 2\Omega\ddot{y}'\cos\alpha$$

y reemplacemos con $\hat{y}')$

$$\dddot{x}' = 2\Omega\cos\alpha\cdot(-2\Omega\cos\alpha\,\dot{x}')$$

$$= -4\Omega^2\cos^2\alpha\,\dot{x}' \quad (1)$$

que por indicación tiene solución

$$x'(t) = C_{1x}\cos(2\Omega\cos\alpha\cdot t) + C_{2x}\sin(2\Omega\cos\alpha\cdot t) + C_{3x} \quad (2)$$

Como parte del reposo $\dot{x}'(t=0)=0$ y desde el origen $x'(t=0)=0$, además por $\hat{i}'$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t=0) = g\sin\alpha$$

Impongamos C. I. en (2)

- $x'(t=0) = 0 = C_{1x} + C_{3x} \Rightarrow C_{1x} = -C_{3x}$
- $\dot{x}'(t=0) = 0 = 2\Omega\cos\alpha\, C_{2x} \Rightarrow C_{2x} = 0$
- $\ddot{x}'(t=0) = g\sin\alpha = -4\Omega^2\cos^2\alpha\, C_{1x} \Rightarrow C_{1x} = -\dfrac{g\sin\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}$

$$\therefore\ x'(t) = \frac{g\sin\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}\left(1-\cos(2\Omega\cos\alpha\cdot t)\right)$$

Hacemos algo similar con $y'(t)$

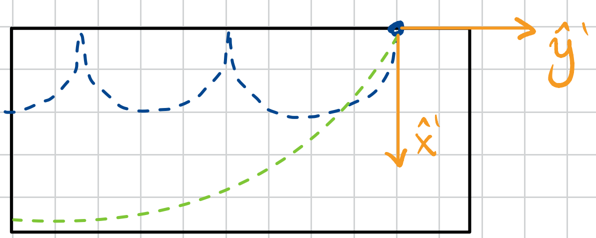
$$\dddot{y}'(t) = -2\Omega\cos\alpha\,\ddot{x}'$$

$$= -2\Omega g\cos\alpha\sin\alpha - 4\Omega^2\cos^2\alpha\,\dot{y}'$$

$$= A - \omega_0^2\,\dot{y}'$$

bla bla $\quad y'(t) = -\dfrac{g\sin\alpha}{2\Omega\cos\alpha}\,t + \dfrac{g\sin\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}\sin(2\Omega\cos\alpha\cdot t)$

c)



El máximo descenso, viendo $\dot{x}(t)$, es cuando $\cos(2\Omega\cos\alpha \cdot t^{*}) = -1$ y para la rapidez

$$\|\vec{v}(t)\|^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \frac{g^2\sin^2\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha} - \frac{g^2\sin^2\alpha}{2\Omega^2\cos^2\alpha}\cos(2\Omega\cos\alpha \cdot t) + \frac{g^2\sin^2\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}$$

que es máxima en el mismo tiempo $\cos(2\Omega\cos\alpha \cdot t^{**}) = -1$.