

# Auxiliar 21

SRNI (y Lagrangiano?)

**Profesor: Gonzalo Palma**

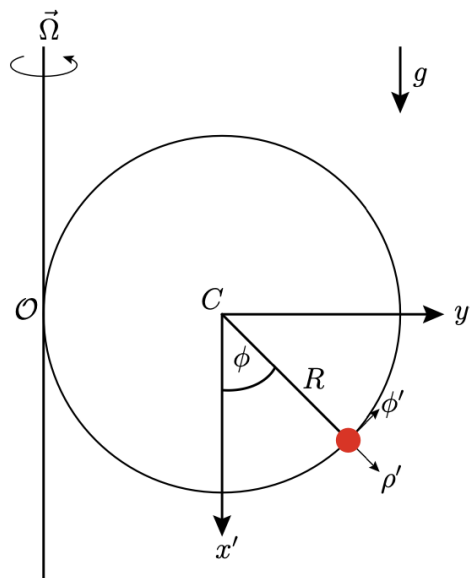
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi

Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

**P1.-**

Un aro de radio  $R$ , gira en torno a un eje vertical tangente al aro en el punto  $O$  con velocidad angular  $\vec{\Omega}$  constante. Una partícula  $P$  de masa  $m$  puede moverse a lo largo del aro sin roce alguno. Se define un sistema de referencia no inercial  $S'$  centrado en el centro  $C$  del aro y con ejes  $x'$  y  $y'$  en el plano del aro como indica la figura.

- Escriba la ecuación de movimiento de  $P$  y su proyección a la dirección  $\hat{\phi}'$  en la forma  $mR\ddot{\phi} = f(\phi)$
- Obtenga la energía potencial  $U$  que se calcula como  $f = -\frac{1}{R} \frac{dU}{d\phi}$
- Suponiendo que  $R\Omega^2 \ll g$  y que el punto de equilibrio es cercano a cero, determine de forma aproximada este ángulo



# Formulario

## Sistemas de referencia no inerciales

La ecuación de movimiento para el SRNI  $S'$  es

$$m\vec{a}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde  $\vec{F}$  es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula;  $\vec{R}$  vector que va desde el origen de  $S$  al origen de  $S'$ ;  $\vec{\Omega}$  velocidad angular con la que giran los ejes de  $S'$  c/r a los de  $S$  y  $\vec{r}'$  vector que va desde el origen de  $S'$  hasta la partícula.

# Auxiliar 21

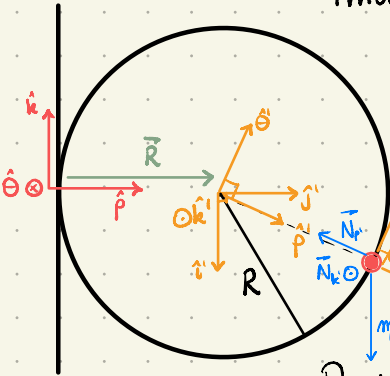
P1

Recordemos nuestra fórmula maestra

\* En toda la parrilla ocupé  $\theta$  en vez de  $\phi$ , pero no importa

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$$

reales
trasmicional
centrifuga
Coriolis
azimutal



En este caso definimos "2" SRNI (nuestro aro), ya que la masa se mueve en un círculo (el aro), por lo que conviene usar coord. polares  $(\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$ , pero también definimos el sist. de coord. cartesianas  $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$ , para poder descomponer  $(\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$  en este sist. y luego encontrar una relación con el sist.  $(\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$  que es de utilidad, ya que el SRNI se mueve en un círculo alrededor de la vava (nuestro SRNI)

Por lo tanto, tenemos que la posición del SRNI c/c al SRI,  $\vec{R}$ , es  $\vec{R} = R\hat{p}' \Rightarrow \dot{\vec{R}} = R\dot{\theta}'\hat{\theta}' \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\ddot{\theta}'\hat{p}' + R\dot{\theta}'^2\hat{\theta}'$ , ya que  $\dot{\theta}' = \Omega$  constante  $\Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\Omega^2\hat{p}'$  (1)

Relaciones del problema

$\triangleright \hat{p}' = \hat{j}'$   
 $\triangleright \hat{\theta}' = -\hat{k}'$   
 $\triangleright \hat{k}' = -\hat{i}'$

Ahora describamos la posición de la partícula en el SRNI

$$\vec{r}' = R\hat{p}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = R\dot{\theta}'\hat{\theta}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = -R\ddot{\theta}'\hat{p}' + R\dot{\theta}'^2\hat{\theta}'$$
 (2)

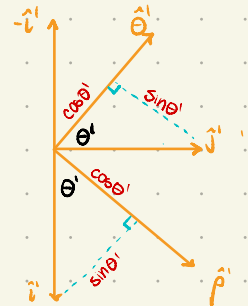
Pasemos de  $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$  a  $(\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$ , por dibujo tenemos las descomposiciones

$$\hat{i}' = \cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}' ; \hat{j}' = \sin\theta'\hat{p}' + \cos\theta'\hat{\theta}' ; \hat{k}' = \hat{k}'$$

Reemplazamos en (2) y calculamos las fuerzas ficticias donde  $\dot{\vec{\Omega}} = -\Omega\hat{i}'$

$$\triangleright -m\ddot{\vec{R}} = mR\Omega^2\hat{p}' = mR\Omega^2\hat{j}' = mR\Omega^2(\sin\theta'\hat{p}' + \cos\theta'\hat{\theta}')$$

$$\begin{aligned} \triangleright -m\dot{\vec{\Omega}} \times (\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}') &= m\Omega\hat{i}' \times (-\Omega\hat{i}' \times R\hat{p}') \\ &= -m\Omega^2R(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') \times (\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') \times \hat{p}' \\ &= -m\Omega^2R\sin\theta'(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') \times \hat{k}' \\ &= m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta'\hat{\theta}' + m\Omega^2R\sin^2\theta'\hat{p}' \end{aligned}$$



$$\triangleright -2m\dot{\vec{\Omega}} \times \dot{\vec{r}}' = 2m\Omega(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') \times R\dot{\theta}'\hat{\theta}' = 2m\Omega\cos\theta'R\dot{\theta}'\hat{k}'$$

$$\triangleright -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' = 0 \quad (\Omega \text{ es constante})$$

Ahora describamos las fuerzas reales, que son: el peso en  $\hat{i}'$  y los normales ejercidos por el aro en  $\hat{p}'$  y  $\hat{k}'$

$$\Rightarrow m\vec{a} = \sum \vec{F}_i = mg\hat{i}' + N_p\hat{p}' + N_z\hat{k}', \text{ describimos en } (\hat{p}', \hat{\theta}', \hat{k}')$$

$$= mg(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') + N_p\hat{p}' + N_z\hat{k}'$$

Juntamos todo

$$m(-R\ddot{\theta}'\hat{p}' + R\dot{\theta}'^2\hat{\theta}') = mg(\cos\theta'\hat{p}' - \sin\theta'\hat{\theta}') + N_p\hat{p}' + N_z\hat{k}' + mR\Omega^2(\sin\theta'\hat{p}' + \cos\theta'\hat{\theta}') + m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta'\hat{\theta}' + m\Omega^2R\sin^2\theta'\hat{p}' + 2m\Omega\cos\theta'R\dot{\theta}'\hat{k}'$$

y la proyección en  $\hat{\theta}'$  es hacer el producto punto de esta última ecuación con  $\hat{\theta}'$ , que es lo mismo

que escoger la ec. escalar en  $\theta'$

$$\dot{\theta}') mR\ddot{\theta}' = -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta', \text{ donde identificamos } f$$

$$\Rightarrow f(\theta') \equiv -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta'$$

b) Calculamos la energía potencial como dice el enunciado

$$f = -\frac{1}{R} \frac{dU}{d\theta'} \Leftrightarrow -\frac{1}{R} \frac{dU}{d\theta'} = -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta' \quad / \cdot R \int d\theta'$$

$$\Rightarrow -\int^U dU = -mgR \int^{\theta'} \sin\theta' d\theta' + mR^2\Omega^2 \int^{\theta'} \cos\theta' d\theta' + m\Omega^2R^2 \int^{\theta'} \sin\theta'\cos\theta' d\theta'$$

*no nos interesa la constante de integración*

$$\Leftrightarrow U(\theta') = -mgR\cos\theta' - mR^2\Omega^2\sin\theta' - mR^2\Omega^2 \frac{\sin^2\theta'}{2} + C$$

donde  $C$  es la suma de las constantes de integración y podemos definir como 0

c) Sabemos que el punto de equilibrio se tiene para  $dU/d\theta' = 0$ ,

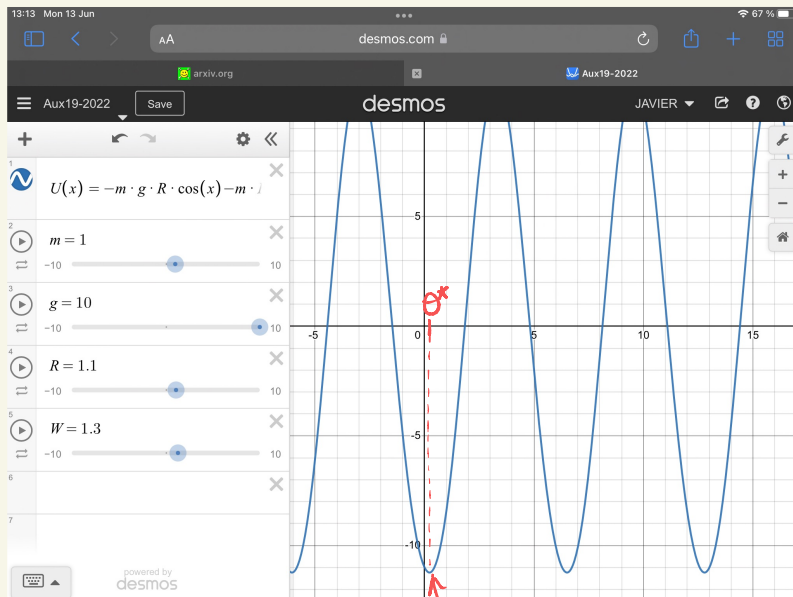
$$\left. \frac{dU}{d\theta'} \right|_{\theta=\theta^*} = mgR\sin\theta^* - mR^2\Omega^2\cos\theta^* - mR^2\Omega^2\sin\theta^*\cos\theta^* \stackrel{!}{=} 0$$

Donde resulta difícil despejar  $\theta^*$ , pero tenemos por enunciado que  $\theta^* \approx 0$ , por lo que podemos aproximar  $\sin\theta^* \approx \theta^*$  y  $\cos\theta^* \approx 1$

$$\Rightarrow mgR\theta^* - mR^2\Omega^2 - mR^2\Omega^2\theta^* = 0$$
$$\Leftrightarrow \theta^* = \frac{mR^2\Omega^2}{mgR - mR^2\Omega^2} = \frac{R\Omega^2}{g - R\Omega^2}$$

además nos dicen que  $R\Omega^2 \ll g$  por lo que nos queda

$$\theta^* \approx \frac{R\Omega^2}{g} \approx 0$$



En este plot vemos el potencial  $U(\theta')$  con la condición de que  $R\Omega^2 \ll g$ , lo que provoca que uno de los mínimos (punto de equilibrio estable) sea cercano a 0, por lo que se puede hacer la aproximación de los senos y cosenos

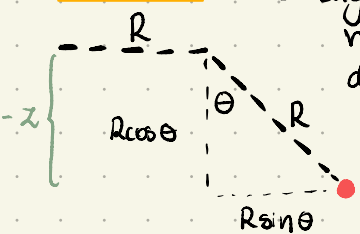
En la siguiente página podrán ver cómo se hace este mismo problema, pero con Lagrangiano en vez de SRN1



# Mecánica lagrangiana

Vista de lado

El lagrangiano se define como  $L = T - V$ , donde usaremos la velocidad en cartesianas y la energía potencial es la gravitacional, que definiremos 0 en el centro del aro.



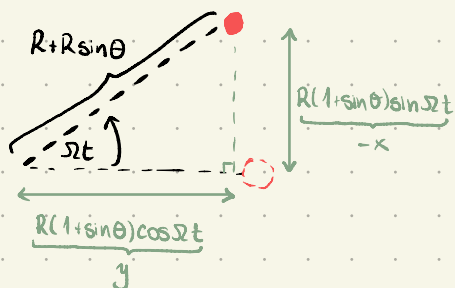
$$x(t) = -R(1 + \sin\theta)\sin\Omega t \quad ; \quad y(t) = R(1 + \sin\theta)\cos\Omega t \quad ; \quad z(t) = -R\cos\theta$$

derivamos

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\cos\theta\dot{\theta}\sin\Omega t - R(1 + \sin\theta)\Omega\cos\Omega t \\ \dot{y} = R\cos\theta\dot{\theta}\cos\Omega t - R(1 + \sin\theta)\Omega\sin\Omega t \\ \dot{z} = R\sin\theta\dot{\theta} \end{cases}$$

Primero definimos la posición con respecto a las variables del problema y luego la derivamos para encontrar la velocidad

Vista de arriba



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \left( (-R\cos\theta\dot{\theta}\sin\Omega t - R(1 + \sin\theta)\Omega\cos\Omega t)^2 + (R\cos\theta\dot{\theta}\cos\Omega t - R(1 + \sin\theta)\Omega\sin\Omega t)^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left( R^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\sin^2\Omega t + 2R^2\cos\theta\dot{\theta}(1 + \sin\theta)\Omega\sin\Omega t\cos\Omega t + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2\cos^2\Omega t + R^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\cos^2\Omega t - 2R^2\cos\theta\dot{\theta}(1 + \sin\theta)\Omega\sin\Omega t\cos\Omega t + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2\sin^2\Omega t + R^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left( R^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} m \left( R^2\dot{\theta}^2 + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2 \right)$$

y la energía potencial sería  $V = mgz = -mgR\cos\theta$ . Con lo que el lagrangiano nos queda

$$L = \frac{1}{2} m \left( R^2\dot{\theta}^2 + R^2(1 + \sin\theta)^2\Omega^2 \right) + mgR\cos\theta$$

Y las ecuaciones de movimiento se calculan con la ec. de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \left( \text{en verdad es con } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$$

$$\triangleright \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\Omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\triangleright \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mR^2\ddot{\theta}$$

Así que la ecuación de Euler-Lagrange nos queda

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\Omega^2\cos\theta + mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + mR\Omega^2\cos\theta + mR\Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

Que si son observadores, encontramos la misma ecuación de la proyección en  $\hat{\theta}'$ , solo que sin ver nada de SRNI...