Auxiliar 21

SRNI

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

P1.-

Considere una caja de base rectangular (lados $2l_0$ y $4l_0$) que rota con velocidad angular constante, desconocida, respecto de un eje vertical que pasa por su vértice A como muestra la figura. Por el interior de la caja, una partícula de masa m está ligada al vértice B , mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. Se desprecia cualquier roce.

(a) Calcule la velocidad angular de la caja Ω_0 tal que la partícula tenga un punto de equilibrio estable en el punto D (ver figura), además determine el periodo de pequeñas oscilaciones con respecto a este punto.

(b) Considere el valor de Ω_0 que acaba de calcular y que la masa es soltada desde el reposo (relativo a la caja que gira) en el vértice C, calcule a que distancia de B la masa se separa de la pared BC.

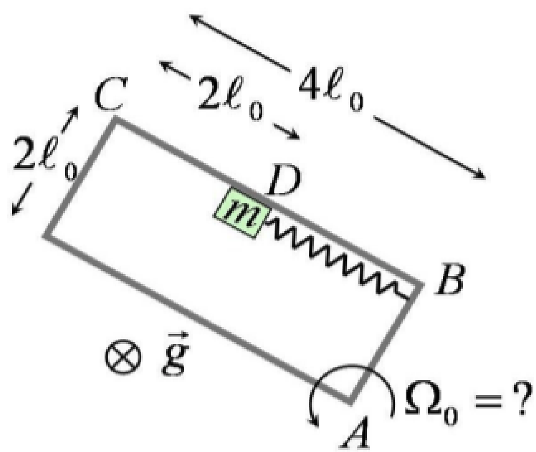


Figura 1: Caja giratoria con respecto al vértice A.

Formulario

Sistemas de referencia no inerciales

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

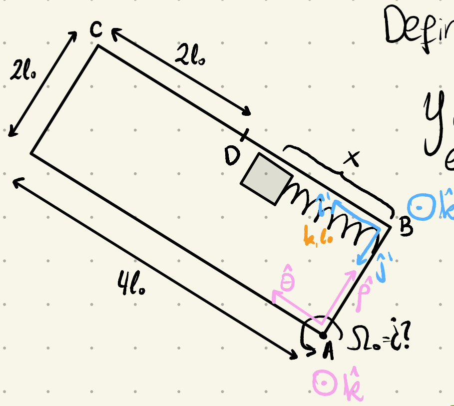
$$m\vec{a}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula; $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S'; $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes de S' c/r a los de S y $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Auxiliar 21

P1

a. Recordamos: $m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\text{reales}} \underbrace{- m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} \underbrace{- m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} \underbrace{- 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} \underbrace{- m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}}$



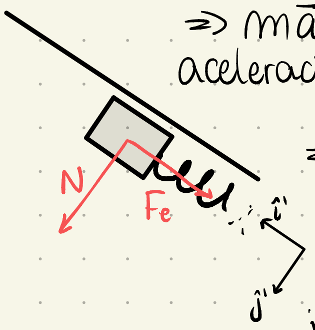
Definimos un SRI con coordenadas cilíndricas en el vértice A

$$\vec{R} = 2l_0\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = 2l_0\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \cancel{2l_0\ddot{\theta}\hat{\theta}} - 2l_0\dot{\theta}^2\hat{\rho} = -2l_0\Omega_0^2\hat{\rho}$$

Y definimos un SRNI con coordenadas cartesianas con origen en el vértice B y calzando el eje $\hat{i}'$ con la pared BC $\Rightarrow \hat{i}' = \hat{\theta}$ ^ $\hat{\rho} = -\hat{j}'$

- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\Omega_0\hat{k}\times(\Omega_0\hat{k}\times x'\hat{i}')$
  $= -m\Omega_0^2 x'\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{i}')$
  $= -m\Omega_0^2 x'\hat{k}'\times\hat{j}' = m\Omega_0^2 x'\hat{i}'$
- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m\Omega_0\hat{k}\times\dot{x}'\hat{i}' = -2m\Omega_0\dot{x}'\hat{k}'\times\hat{i}' = -2m\Omega_0\dot{x}\hat{j}'$
- $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = 0$ / por enunciado Ω_0 es cte.

Habiendo encontrado las fuerzas ficticias, seguimos con las reales que afectan a la masa, son: la fuerza elástica del resorte (paralela a la pared BC, eje $\hat{i}'$) y una fuerza normal que ejerce la pared BC (perpendicular a la pared BC, eje $\hat{j}'$)



$\Rightarrow m\vec{a} = \sum\vec{F}_{reales} = -k(x'-l_0)\hat{i}' + N\hat{j}'$, con lo que podemos describir la aceleración $\vec{a}'$ del SRNI, juntamos todo

$$\Rightarrow m\vec{a}' = -2ml_0\Omega_0^2\hat{j}' - k(x'-l_0)\hat{i}' + N\hat{j}' + m\Omega_0^2x'\hat{i}' - 2m\Omega_0^2\dot{x}'\hat{j}$$

$$\Leftrightarrow m(\ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}\hat{j}') = 2ml_0\Omega_0^2\hat{j}' - k(x'-l_0)\hat{i}' + N\hat{j}' + m\Omega_0^2x'\hat{i}' - 2m\Omega_0\dot{x}'\hat{j}$$

juntamos los términos que acompañen a un mismo vector unitario para obtener las ecs. escalares

$\hat{i}'$) $m\ddot{x}' = -k(x'-l_0) + m\Omega_0^2x'$ (1)

$\hat{j}'$) $m\ddot{y}' = -2ml_0\Omega_0^2 + N - 2m\Omega_0\dot{x}'$ (2)

Para que el punto D sea punto de equilibrio, ahí la suma de "fuerzas" en el eje $\hat{i}'$ debe ser 0, que es equivalente a decir que la aceleración $\ddot{x}'$ sea 0 en $x' = D = 2l_0$

$$(1) \Rightarrow 0 = -k(2l_0 - l_0) + m\Omega_0^2 2l_0 \Leftrightarrow kl_0 = 2ml_0\Omega_0^2 \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Ya con el valor de Ω_0 manipulamos (1) para que quede con la forma de un oscilador armónico

$$\Rightarrow m\ddot{x}' = x'(m\Omega_0^2 - k) + kl_0 \Leftrightarrow \ddot{x}' + \frac{k-m\Omega_0^2}{m}x' - \frac{kl_0}{m}\cdot\frac{\frac{k-m\Omega_0^2}{m}}{\frac{k-m\Omega_0^2}{m}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}' + \frac{k-m\Omega_0^2}{m}\left(x' - \frac{kl_0\cdot m}{m(k-m\Omega_0^2)}\right) = 0$$

$$\ddot{x}' + \omega_0^2\left(x' + \frac{kl_0}{m\Omega_0^2 - k}\right) = 0 \quad / \quad \omega_0^2 = \frac{k-m\Omega_0^2}{m}$$

Hacemos el cambio de variable $z' = x' + kl_0/(m\Omega_0^2 - k) \Rightarrow \ddot{z}' = \ddot{x}'$

$$\Rightarrow \ddot{z}' + \omega_0^2 z' = 0$$

con esta forma de oscilador, sabemos que el periodo se calcula como $T = 2\pi/\omega_0$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - m\Omega_0^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - mk/2m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

b. Sabemos que antes que se despegue la masa de la pared BC, no hay movimiento en el eje $\hat{j}'$ (solo se mueve en $\hat{i}'$), por lo que (2) queda como

$$0 = 2m l_0 \Omega_0^2 + N - 2m\Omega_0 \dot{x}'$$

y la condición para que se separe la masa de la pared es que no haya contacto con esta, o sea, $N=0$, como nos interesa el momento preciso en el que se separa, consideramos ambas condiciones (se cumple en un mismo tiempo $N=0$ y $\ddot{y}'=0$)

$$\Rightarrow 0 = -\cancel{2m} l_0\Omega_0^2 - \cancel{2m}\Omega_0 \dot{x}'_f \Leftrightarrow \dot{x}'_f = -l_0\Omega_0$$

con lo que obtenemos la velocidad en el punto en el que se separa la masa. Ahora usamos (1) que integramos con truco de mecánica

$$\Rightarrow m\dot{x}'\frac{d\dot{x}'}{dx'} = -k(x'-l_0) + m\Omega_0^2 x' \quad / \int_{x'_0}^{x'_f} dx' \quad \Rightarrow m\int_{\dot{x}'_0}^{\dot{x}'_f} \dot{x}'\, d\dot{x}' = -k\int_{x'_0}^{x'_f} x'dx' + kl_0\int_{x'_0}^{x'_f} dx' + m\Omega_0^2\int_{x'_0}^{x'_f} x'dx'$$

donde $\dot{x}'_0 = 0$, $\dot{x}'_f = -l_0\Omega_0$, $x'_0 = 4l_0$ y $x'_f = $ ¿?

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\dot{x}'^2\Big|_{\dot{x}'_0}^{\dot{x}'_f} = \frac{m\Omega_0^2 - k}{2} x'^2\Big|_{x'_0}^{x'_f} + kl_0 x'\Big|_{x'_0}^{x'_f}$$

$$\frac{m}{2} l_0^2\Omega_0^2 = \frac{m\Omega_0^2 - k}{2}(x'^2_f - 16l_0^2) + kl_0(x'_f - 4l_0)$$

$$x'^2_f + \frac{2kl_0}{m\Omega_0^2 - k}x'_f - 16l_0^2 - \frac{8kl_0^2}{m\Omega_0^2 - k} - \frac{ml_0^2\Omega_0^2}{m\Omega_0^2 - k} = 0$$

$$x'^2_f - 4l_0 x'_f - 16l_0^2 - \frac{8\cancel{k}l_0^2}{m\cancel{k}}\frac{2m}{\cancel{k}} + \frac{2\cancel{m}l_0^2}{\cancel{k}}\frac{\cancel{k}}{2\cancel{m}} = 0$$

$$x'^2_f - 4l_0x'_f + l_0^2 = 0 \Rightarrow x'_f = \frac{4l_0 \pm \sqrt{16l_0^2 - 4l_0^2}}{2} = 2l_0 \pm l_0\sqrt{3} = l_0(2\pm\sqrt{3})$$

Como parte en $C = 4l_0$, se toma el valor más grande de x'_f

$$\therefore x'_f = l_0(2+\sqrt{3})$$