Auxiliar 21

Asustado, Potter?? nop

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.- yop

Considere un sistema de dos partículas fijadas a los extremos de una barra rígida en forma de L y cuya masa para efectos de este problema se considera despreciable. El brazo menor tiene un largo ℓ y el brazo mayor un largo 2ℓ. La masa de la partícula que se encuentra fija en el extremo del brazo más largo es m, en tanto que la masa de la partícula fija en el extremo del brazo más corto es $2m$. El sistema, que puede rotar sin roce sobre un eje horizontal en el punto de unión de los dos brazos de la estructura, está inicialmente en reposo, sostenido de modo que el brazo más largo se encuentra en posición vertical. En un cierto instante el sistema se libera sin ningún impulso inicial y la estructura empieza a rotar por efecto de la gravedad. Calcule lo siguiente:

1. Aceleración angular de la estructura en función del ángulo ϕ.
2. Velocidad angular de la estructura en función del ángulo ϕ.

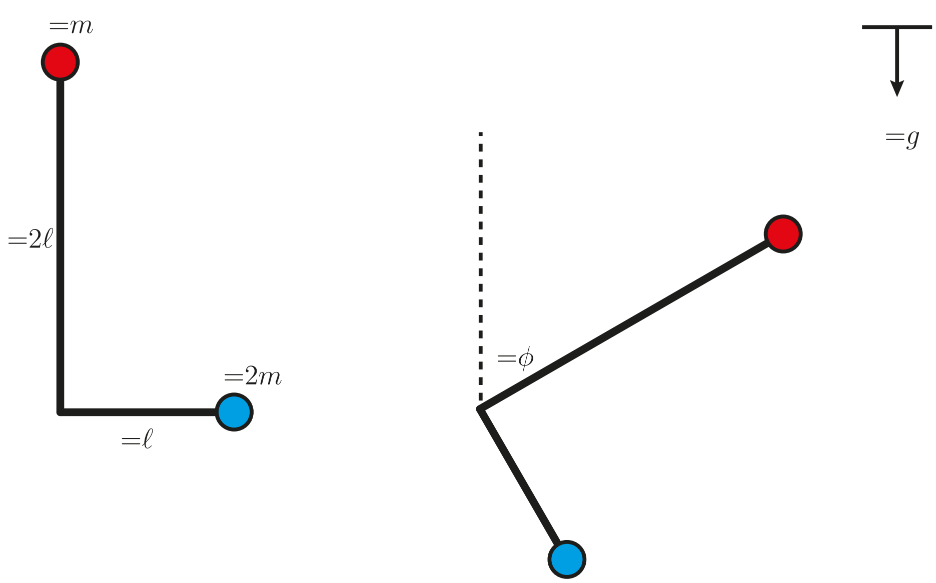


Figura 1: Problema 2, Objeto con forma de L en el instante inical, y en un tiempo posterior

P2.- Wenumpy

Considere una estructura rígida formada por dos varas sin masa de largo $2L$ que forman una cruz simétrica como muestra la figura. En los extremos de las varas se ubican 4 partículas puntuales de masa m cada una. Si inicialmente la estructura se encuentra en reposo en su posición de equilibrio inestable ($\theta = 0°$) y se le da una pequeña perturbación que la hace volcar como se indica, se pide:

(a) Determinar los valores de $\dot{\theta}$ y de la normal en 1 para el instante justo antes de que la partícula 2 choca con la superficie (asuma que hasta antes del choque la partícula 1 no se mueve).

(b) Determine la energía mecánica total de la estructura después del choque de la partícula 2 con la superficie (asuma que después del choque la partícula 2 queda inmóvil, y la estructura comienza a rotar en torno a 2).

Hint: Se conserva el momentum angular antes y después de la colisión medido con respecto a 2.

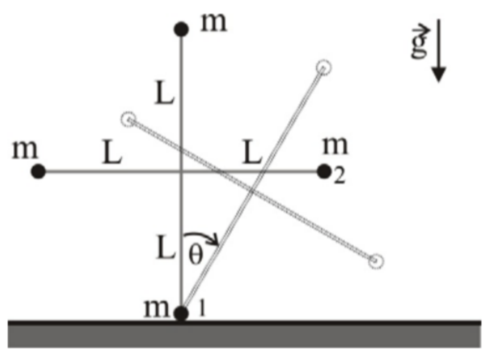


Figura 2: Cruz de barras $2L$ y masas m atadas a los extremos.

Auxiliar 21

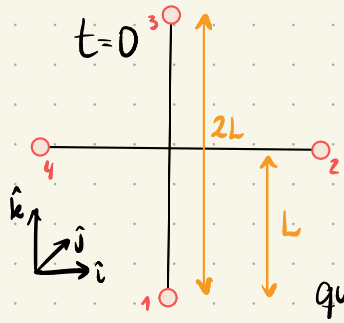
P2

Como indican las figuras, es importante dividir el problemas en 2 partes, **justo** antes que 2 colisione y **justo** después de que colisione

Primera parte

Solo tenemos fuerzas internas (las barras que unen las partículas) y la normal que ejerce el suelo sobre la masa pivote, por lo que se conserva la energía

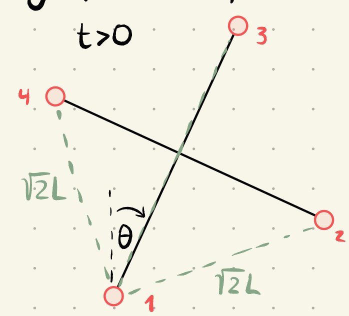
Como inicialmente el sist. está en reposo, solo tenemos energía potencial



$$E_0 = \sum_i U_{i,0} = U_{1,0} + U_{2,0} + U_{3,0} + U_{4,0}$$

$$= mg\cdot 0 + mgL + mg2L + mgL = \overbrace{4mgL}^{\text{Conservado}}$$

Justo antes que 2 colisione, claramente todas las partículas, menos 1, tienen velocidad $\Rightarrow$ energía cinética, además de energía potencial, por lo que primero expresamos K



$$K_{-\epsilon} = \sum_i K_{i,-\epsilon} = \sum_i \frac{1}{2} m v_{i,-\epsilon}^2 = \frac{1}{2} m \left(\cancelto{0}{v_1^2} + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \right)$$

el sub índice $-\epsilon$ denota que nos referimos a una cantidad justo "antes" del choque

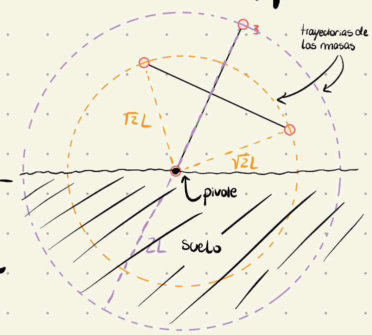
$$= \frac{1}{2} m \left((\sqrt{2} L \dot{\theta}_{-\epsilon})^2 + (2L\dot{\theta}_{-\epsilon})^2 + (\sqrt{2} L \dot{\theta}_{-\epsilon})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\theta}_{-\epsilon}^2 (2L^2 + 4L^2 + 2L^2) = 4L^2 m \dot{\theta}_{-\epsilon}^2$$

Dande es importante que se den cuenta que cada partícula sigue un movimiento circular, por lo que las velocidades usadas son únicamente tangenciales, de la forma

$$v_i = R_i \dot{\theta}$$

donde los radios R_i son los dibujados en verde con líneas punteadas



Ahora la potencial se calcula con geometría simplemente, sin embargo consideramos que 2 ya está a la altura del suelo. Esto lo podemos hacer porque justo antes que 2 colisione, está a una altura infinitesimal sobre el piso, por lo que la podemos despreciar

$$U_{-\epsilon} = \sum_i U_{i,-\epsilon} = mg \sum_i z_{i,-\epsilon} = mg(\cancel{z_1} + \cancelto{\sim 0}{z_2} + z_3 + z_4)$$

$$= mg(\sqrt{2} L + \sqrt{2} L) = 2mg\sqrt{2} L$$

Usamos conservación de la energ. mec. y despejamos $\dot{\theta}_{-\epsilon}$

$$E_0 = E_{-\epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \cancelto{2}{4}\cancel{m}g\cancel{L} = \cancelto{2}{4}L^{\cancel{2}}\cancel{m}\dot{\theta}_{-\epsilon}^2 + \cancel{2}\cancel{m}g\sqrt{2}\cancel{L}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_{-\epsilon} = \sqrt{\frac{2g - \sqrt{2}g}{2L}}$$

Para calcular la normal usamos el CM (en su componente en $\hat{k}$) (justo al medio de la cruz) que tiene la ec. de mov.

$$4m\ddot{z}_{cm} = -4mg + N$$

$$\Leftrightarrow N = 4m(\ddot{z}_{cm} + g)$$

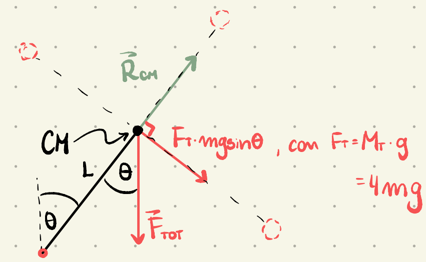
donde z_{cm} lo podemos describir en función de θ como

$$z_{cm} = L\cos\theta \Rightarrow \dot{z}_{cm} = -L\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \ddot{z}_{cm} = -L\ddot{\theta}\sin\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\Rightarrow N = 4m(-L\ddot{\theta}\sin\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta + g) \quad (1)$$

así que debemos encontrar $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, que podemos conseguir con otra ec.: la relación torque-momentum angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$



donde $\vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}^{\,CM}_{ext} = L \cdot 4mg\sin\theta\,\hat{j}$ } ver anexo 1 para más detalle

Y el momentum angular $\vec{L} = \sum_i m\vec{r}_i \times \vec{v}_i$

$$= m\sum_i r_i v_i\,\hat{j} \qquad / \ \vec{r}_i \perp \vec{v}_i$$

velocidades circulares

$$= m\left(\sqrt{2}L\cdot(\sqrt{2}L\dot{\theta}) + 2L(2L\dot{\theta}) + \sqrt{2}L(\sqrt{2}L\dot{\theta})\right)\hat{j}$$

$$= 8mL^2\dot{\theta}\,\hat{j}$$

por lo que nos quedaría

$$\Rightarrow \cancel{8}^{\,2}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta}\cancel{\hat{j}} = \cancel{4}\cancel{m}g\cancel{L}\sin\theta\cancel{\hat{j}}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{2L}g\sin\theta$$

truco mecánica

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{g}{2L}\int_0^{\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{2L}(\cos\theta - 1)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{L}(1-\cos\theta)}$$

Así que (1) nos quedaría

$$N = 4m\left(-L\cdot\frac{1}{2L}g\sin\theta\cdot\sin\theta - L\,\frac{g}{L}(1-\cos\theta)\cos\theta + g\right)$$

$$= 4m\left(-\frac{g}{2}\sin^2\theta - g\cos\theta + g\cos^2\theta + g\right)$$

$$= 4m\left(\frac{g}{2} - g\cos\theta + \frac{3}{2}g\cos^2\theta\right)$$

y cuando 2 está justo antes de chocar el piso $\theta = \pi/4$

$$\Rightarrow N(\theta{=}\pi/4) = 4m\left(\frac{g}{2} - g\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}g\frac{1}{2}\right)$$
$$= 4m\left(\frac{2g}{4} + \frac{3g}{4} - g\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4m\left(\frac{5g}{4} - g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

b. Si calculamos $\vec{L}$ c/r a 2, notamos que la fuerza ejercida por el suelo sobre esta partícula no ejerce torque, por lo que se conserva el momentum angular c/r a 2.

Calculemos el momentum angular c/r a 2 justo antes del choque, donde la velocidad angular es $\dot{\theta}_{-\epsilon}$ y recordamos que las magnitudes de las velocidades son

$$|\vec{v}_1| = 0 \;,\; |\vec{v}_3| = 2L\dot{\theta}_{-\epsilon} \;,\; |\vec{v}_4| = \sqrt{2}L\dot{\theta}_{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_2 = \sum_i m\vec{r}_{i,2}\times\vec{v}_{i,2} = m\sum_i r_{i,2}|\vec{v}_i|\sin(\alpha_{i,2})\hat{j}$$
$$= mr_{3,2}\cdot 2L\dot{\theta}_{-\epsilon}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\hat{j} + mr_{4,2}\cdot\sqrt{2}L\dot{\theta}_{-\epsilon}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\hat{j}$$
$$= m\cancel{\sqrt{2}}L\cdot 2L\dot{\theta}_{-\epsilon}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\hat{j} + m2L\cdot\cancel{\sqrt{2}}L\dot{\theta}_{-\epsilon}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\hat{j}$$
$$= 2mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon}\hat{j} + 2mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon}\hat{j} = 4mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon}\hat{j}$$

ver anexo 2

Y ahora calculamos $\vec{L}$, nuevamente con respecto a 2, pero luego del choque, donde 1 sí tendrá velocidad y la velocidad angular del sist. c/r a la vertical será $\dot{\theta}_{+\epsilon}$

$$\Rightarrow \vec{L}_{2,+\epsilon} = \sum_i m\vec{r}_i\times\vec{v}_i = \sum_i mr_iv_i\hat{j}$$

/ ahora el pivote es 2, por lo que es análogo a la primera parte, $\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$

$$= mr_1v_1\hat{j} + mr_3v_3\hat{j} + mr_4v_4\hat{j}$$
$$= \left(m\sqrt{2}L(\sqrt{2}L\dot{\theta}_{+\epsilon}) + m\sqrt{2}L(\sqrt{2}L\dot{\theta}_{+\epsilon}) + m2L(2L\dot{\theta}_{+\epsilon})\right)\hat{j}$$
$$= 8mL^2\dot{\theta}_{+\epsilon}\hat{j}$$

Ahora, por conservación del momentum angular c/r a 2

$$\vec{L}_{2,-\epsilon} = \vec{L}_{2,+\epsilon}$$
$$\Rightarrow 4mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon} = 8mL^2\dot{\theta}_{+\epsilon}$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}_{+\epsilon} = \frac{\dot{\theta}_{-\epsilon}}{2}$$

donde conocemos el valor de $\dot{\theta}_{-\epsilon}$ de a). Para calcular la energía mecánica justo después del choque hacemos la aproximación de que tanto 1 como 2 están en el suelo

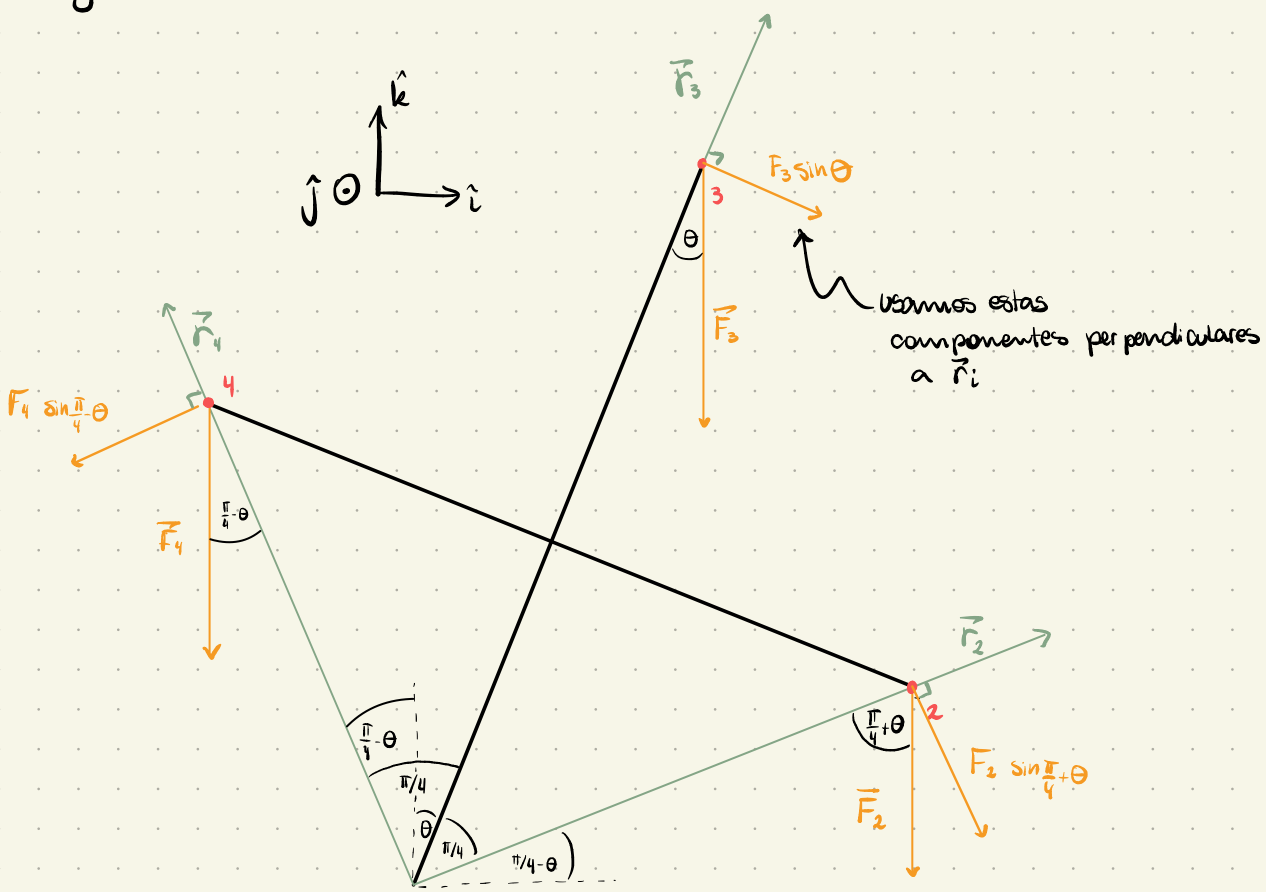
$$\Rightarrow K_{+\epsilon} = \frac{1}{2}m(\sqrt{2}L\dot{\theta}_{+\epsilon})^2 + \frac{1}{2}m(2L\dot{\theta}_{+\epsilon})^2 + \frac{1}{2}m(\sqrt{2}L\dot{\theta}_{+\epsilon})^2$$
$$= \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_{+\epsilon}^2(2+4+2) = 4mL^2\dot{\theta}_{+\epsilon}^2 = mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon}^2$$

▷ $U_{+\epsilon} = 2mg\sqrt{2}L$

$\Rightarrow E_{+\epsilon} = K_{+\epsilon} + U_{+\epsilon}$

Anexo 1.

Para los productos cruz podemos hacer el truco de encontrar la componente del segundo vector que sea perpendicular al primero, con esto encontramos la magnitud, la dirección la obtenemos haciendo regla de la mano derecha



Debido a que es un sólido rígido podemos calcular el torque externo como el torque ejercido sobre el CM, pero también lo podemos hacer sumando los torques sobre cada partícula por separado (normalmente es más latero de esta última forma, pero démosle)

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{\tau}_{ext,i} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$

$$= r_2 F_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\hat{j} + r_3 F_3 \sin\theta\hat{j} - r_4 F_4 \sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\hat{j}$$

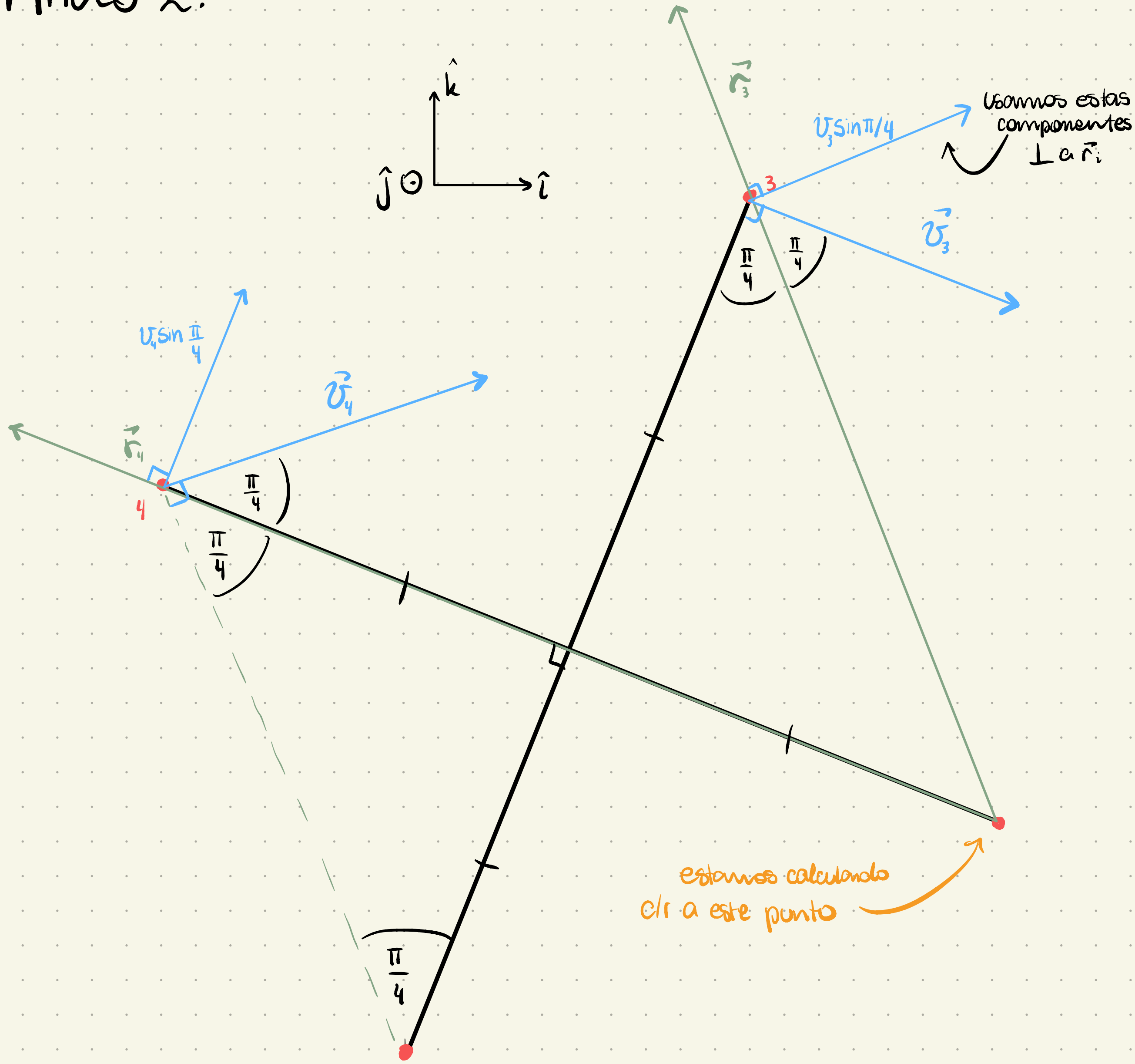
$$= \sqrt{2}Lmg\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)\hat{j} + 2Lmg\sin\theta\hat{j}$$

$$= \sqrt{2}Lmg\,\sqrt{2}\sin\theta\hat{j} + 2mgL\sin\theta\hat{j}$$

$$= 4mgL\sin\theta\hat{j}$$

Que es lo mismo a lo que llegamos usando CM

Anexo 2.



$$\Rightarrow \vec{L}_2 = m\vec{r}_3 \times \vec{v}_3 + m\vec{r}_4 \times \vec{v}_4 = m\left(r_3 v_3 \sin\frac{\pi}{4}\hat{\jmath} + r_4 v_4 \sin\frac{\pi}{4}\hat{\jmath}\right)$$

$$= m\left(\sqrt{2}L\,(2L\dot{\theta}_{-\epsilon})\,\frac{1}{\sqrt{2}} + 2L\,(\sqrt{2}L\dot{\theta}_{-\epsilon})\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\jmath}$$

$$= 4mL^2\dot{\theta}_{-\epsilon}\hat{\jmath}$$