Auxiliar 21

Sistemas de referencia no inerciales y sistemas de partículas

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- Considere una caja de base rectangular (lados $2l_0$ y $4l_0$) que rota con velocidad angular constante, desconocida, respecto de un eje vertical que pasa por su vértice A como muestra la figura. Por el interior de la caja, una partícula de masa m está ligada al vértice B , mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. Se desprecia cualquier roce.

(a) Calcule la velocidad angular de la caja Ω_0 tal que la partícula tenga un punto de equilibrio estable en el punto D (ver figura), además determine el periodo de pequeñas oscilaciones con respecto a este punto.

(b) Considere el valor de Ω_0 que acaba de calcular y que la masa es soltada desde el reposo (relativo a la caja que gira) en el vértice C, calcule a que distancia de B la masa se separa de la pared BC.

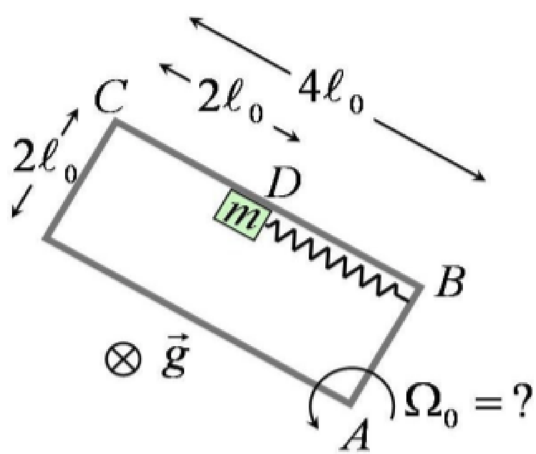


Figura 1: Caja giratoria con respecto al vértice A.

P2.- Sobre una superficie horizontal se encuentran dos partículas de masas m y $2m$ unidas por un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En la condición inicial el resorte está en su largo natural, la partícula derecha (masa m) se mueve con rapidez v_0 hacia la izquierda y la otra partícula (masa $2m$) está en reposo.

(a) Si los coeficientes de roce estático y cinético entre las partículas y la superficie tienen los valores μ_e y μ_c, respectivamente, se pide determinar el mayor valor que puede tener v_0 tal que la partícula de la izquierda nunca se mueva.

(b) Si los coeficientes de roce estático y cinético son ambos nulos determine el mínimo largo que el resorte alcanza en el movimiento resultante del sistema (considere en este caso que v_0 es dato).

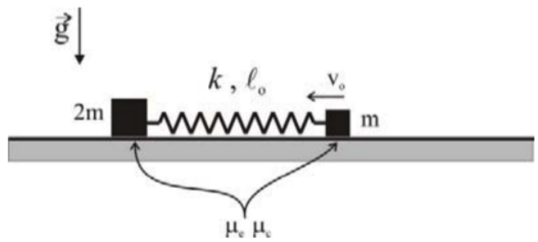
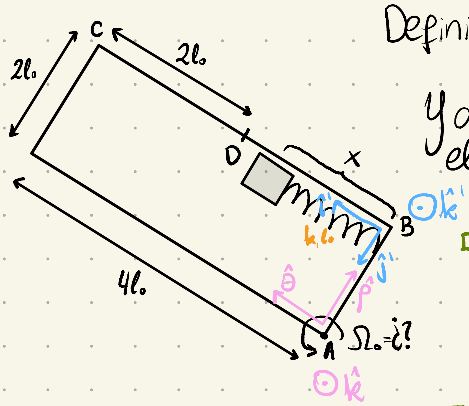


Figura 2: Sistema de dos resortes

Auxiliar 21

P1

a. Recordamos: $m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}}$



Definimos un SRI con coordenadas cilíndricas en el vértice A

$$\vec{R} = 2l_0\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = 2l_0\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \cancel{2l_0\ddot{\theta}\hat{\theta}} - 2l_0\dot{\theta}^2\hat{\rho} = -2l_0\Omega_0^2\hat{\rho}$$

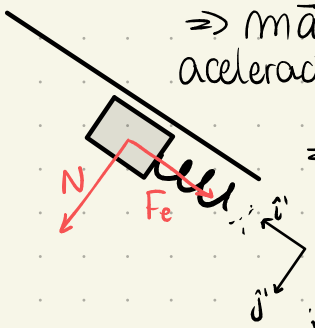
Y definimos un SRNI con coordenadas cartesianas con origen en el vértice B y calzando el eje $\hat{\imath}'$ con la pared BC $\Rightarrow \hat{\imath}' = \hat{\theta}$ ^ $\hat{\rho} = -\hat{\jmath}'$

- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\Omega_0\hat{k}\times(\Omega_0\hat{k}\times x'\hat{\imath}')$
  $= -m\Omega_0^2 x'\hat{k}'\times(\hat{k}'\times\hat{\imath}')$
  $= -m\Omega_0^2 x'\hat{k}'\times\hat{\jmath}' = m\Omega_0^2 x'\hat{\imath}'$

- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m\Omega_0\hat{k}\times\dot{x}'\hat{\imath}' = -2m\Omega_0\dot{x}'\hat{k}'\times\hat{\imath}' = -2m\Omega_0\dot{x}\hat{\jmath}'$

- $-m\cancel{\dot{\vec{\Omega}}}\times\vec{r}' = 0$ / por enunciado Ω_0 es cte

Habiendo encontrado las fuerzas ficticias, seguimos con las reales que afectan a la masa, son: la fuerza elástica del resorte (paralela a la pared BC, eje $\hat{\imath}'$) y una fuerza normal que ejerce la pared BC (perpendicular a la pared BC, eje $\hat{\jmath}'$)



$\Rightarrow m\vec{a} = \sum\vec{F}_{\text{reales}} = -k(x'-l_0)\hat{\imath}' + N\hat{\jmath}'$, con lo que podemos describir la aceleración $\vec{a}'$ del SRNI, juntamos todo

$$\Rightarrow m\vec{a}' = -2ml_0\Omega_0^2\hat{\jmath}' - k(x'-l_0)\hat{\imath}' + N\hat{\jmath}' + m\Omega_0^2x'\hat{\imath}' - 2m\Omega_0^2\dot{x}'\hat{\jmath}$$

$$\Leftrightarrow m(\ddot{x}'\hat{\imath}' + \ddot{y}\hat{\jmath}') = 2ml_0\Omega_0^2\hat{\jmath}' - k(x'-l_0)\hat{\imath}' + N\hat{\jmath}' + m\Omega_0^2x'\hat{\imath}' - 2m\Omega_0\dot{x}'\hat{\jmath}$$

juntamos los términos que acompañen a un mismo vector unitario para obtener las ecs. escalares

$\hat{\imath}'$) $m\ddot{x}' = -k(x'-l_0) + m\Omega_0^2x'$ (1)

$\hat{\jmath}'$) $m\ddot{y}' = -2ml_0\Omega_0^2 + N - 2m\Omega_0\dot{x}'$ (2)

Para que el punto D sea punto de equilibrio, ahí la suma de "fuerzas" en el eje $\hat{\imath}'$ debe ser 0, que es equivalente a decir que la aceleración $\ddot{x}'$ sea 0 en $x' = D = 2l_0$

$$(1) \Rightarrow 0 = -k(2l_0 - l_0) + m\Omega_0^2 2l_0 \Leftrightarrow kl_0 = 2ml_0\Omega_0^2 \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Ya con el valor de Ω_0 manipulamos (1) para que quede con la forma de un oscilador armónico

$$\Rightarrow m\ddot{x}' = x'(m\Omega_0^2 - k) + kl_0 \Leftrightarrow \ddot{x}' + \frac{k - m\Omega_0^2}{m}x' - \frac{kl_0}{m}\cdot\frac{\frac{k-m\Omega_0^2}{m}}{\frac{k-m\Omega_0^2}{m}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}' + \frac{k-m\Omega_0^2}{m}\left(x' - \frac{kl_0\cdot m}{m(k-m\Omega_0^2)}\right) = 0$$

$$\ddot{x}' + \omega_0^2\left(x' + \frac{kl_0}{m\Omega_0^2 - k}\right) = 0 \quad / \quad \omega_0^2 = \frac{k - m\Omega_0^2}{m}$$

Hacemos el cambio de variable $z' = x' + kl_0/(m\Omega_0^2 - k) \Rightarrow \ddot{z}' = \ddot{x}'$

$$\Rightarrow \ddot{z}' + \omega_0^2 z' = 0$$

con esta forma de oscilador, sabemos que el periodo se calcula como $T = 2\pi/\omega_0$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - m\Omega_0^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - mk/2m}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

b. Sabemos que antes que se despegue la masa de la pared BC, no hay movimiento en el eje $\hat{j}'$ (solo se mueve en $\hat{i}'$), por lo que (2) queda como

$$0 = 2ml_0\Omega_0^2 + N - 2m\Omega_0\dot{x}'$$

y la condición para que se separe la masa de la pared es que no haya contacto con esta, o sea, $N=0$, como nos interesa el momento preciso en el que se separa, consideramos ambas condiciones (se cumple en un mismo tiempo $N=0$ y $\ddot{y}'=0$)

$$\Rightarrow 0 = -\cancel{2m}l_0\Omega_0^2 - \cancel{2m}\Omega_0\dot{x}'_f \Leftrightarrow \dot{x}'_f = -l_0\Omega_0$$

con lo que obtenemos la velocidad en el punto en el que se separa la masa. Ahora usamos (1) que integramos con truco de mecánica

$$\Rightarrow m\dot{x}'\frac{d\dot{x}'}{dx'} = -k(x'-l_0) + m\Omega_0^2 x' \;\Big/ \int_{x_0'}^{x_f'} dx' \Rightarrow m\int_{\dot{x}_0'}^{\dot{x}_f'} \dot{x}'\,d\dot{x}' = -k\int_{x_0'}^{x_f'} x'dx' + kl_0\int_{x_0'}^{x_f'} dx' + m\Omega_0^2\int_{x_0'}^{x_f'} x'dx'$$

donde $\dot{x}_0' = 0$, $\dot{x}_f' = -l_0\Omega_0$, $x_0' = 4l_0$ y $x_f' = ¿?$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\dot{x}'^2\Big|_{\dot{x}_0'}^{\dot{x}_f'} = \frac{m\Omega_0^2 - k}{2}x'^2\Big|_{x_0'}^{x_f'} + kl_0 x'\Big|_{x_0'}^{x_f'}$$

$$\frac{m}{2}l_0^2\Omega_0^2 = \frac{m\Omega_0^2 - k}{2}(x_f'^2 - 16l_0^2) + kl_0(x_f' - 4l_0)$$

$$x_f'^2 + \frac{2kl_0}{m\Omega_0^2 - k}x_f' - 16l_0^2 - \frac{8kl_0^2}{m\Omega_0^2 - k} - \frac{ml_0^2\Omega_0^2}{m\Omega_0^2 - k} = 0$$

$$x_f'^2 - 4l_0x_f' - 16l_0^2 - \frac{8\cancel{k}l_0^2}{\cancel{mk}}\frac{2m}{\cancel{k}} + \frac{2\cancel{m}l_0^2}{\cancel{k}}\frac{\cancel{k}}{\cancel{2m}} = 0$$

$$x_f'^2 - 4l_0x_f' + l_0^2 = 0 \Rightarrow x_f' = \frac{4l_0 \pm \sqrt{16l_0^2 - 4l_0^2}}{2} = 2l_0 \pm l_0\sqrt{3} = l_0(2 \pm \sqrt{3})$$

Como parte en $C = 4l_0$, se toma el valor más grande de x_f'

$$\therefore x_f' = l_0(2 + \sqrt{3})$$

P2

Usaremos energía, pero como hay roce, hay que considerar el trabajo producido por esta fuerza no conservativa

$$E_f - E_0 = W_{\text{no conserv.}}$$

Consideremos que la masa m se mueve una distancia máxima d debido a la velocidad inicial v_0, como la fuerza de roce cinético se calcula como $F_r = -\mu_c N_2 = -\mu_c mg$, el trabajo lo calculamos como $W_{\text{no consv.}} = -\int_{r_0}^{r_f} \vec{F}_r\, d\vec{r} = -\int_{l_0}^{l_0-d} -\mu_c m g\, dx = +\mu_c m g\, x\Big|_{l_0}^{l_0-d} = -\mu_c m g d$ (1)

y d lo podemos calcular con la condición que 2m siempre está quieto, por lo que la fuerza de roce estático en su máximo se iguala con la fuerza elástica con el desplazamiento máx. de m

$$\Rightarrow \mu_e 2mg = kd \iff d = \frac{2\mu_e m g}{k} \quad (2)$$

reemplazando en (1) $\Rightarrow$ $W_{\text{no consv.}} = -\mu_c m g \frac{2\mu_e m g}{k} = -\frac{2\mu_c \mu_e m^2 g^2}{k}$

Para las energías mecánicas se considera la energía cinética de ambas masas y la energía potencial del resorte (solo una vez!), donde $\dot{x}_{1o} = \dot{x}_{1f} = 0$; $\dot{x}_{2o} = v_0$ y $\dot{x}_{2f} = 0$; y $U_0 = 0$ y $U_f = \frac{1}{2} k d^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k d^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{\text{no consv.}}$$

$$k\left(\frac{2\mu_e m g}{k}\right)^2 - m v_0^2 = -\frac{4\mu_c \mu_e m^2 g^2}{k}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4\mu_e^2 m g^2}{k} + \frac{4\mu_c \mu_e m g^2}{k}} = 2g\sqrt{\frac{\mu_e m}{k}(\mu_e + \mu_c)}$$

con lo que encontramos el valor **máximo**, ya que en (2) consideramos que la fuerza de roce estático aplicado sobre 2m toma su máximo valor $\mu_e N$

b. Sin considerar roce, tenemos conservación de la energía. Debido a que se le aplica una velocidad inicial a m, 2m que inicialmente estaba en reposo, comienza a moverse de inmediato. Como ambas masas van a estar moviéndose, resulta mejor considerar el movimiento del centro de masa que se mueve con velocidad constante

$$v_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i v_i = \frac{1}{3m}(2m \cdot 0 - m v_0) = -\frac{v_0}{3}$$

que se mantiene en todo el mov. La energía cinética se calcula como

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$$

con $\dot{\rho}_i$ la velocidad de las masas con respecto al centro de masa. Como la energía se conserva, es igual a la inicial que es la energía cinética de la masa m

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Ahora, en el punto de mayor compresión del resorte la velocidad de las partículas con respecto al CM deben ser 0 (o se podría comprimir más) $\iff \dot{\rho}_i = 0$

$$\Rightarrow K_{min} + U_{máx} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\frac{1}{2} 3m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} k \delta_{máx}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\frac{1}{6} m v_0^2 + \frac{1}{2} k \delta_{max}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\delta_{máx} = \sqrt{\frac{2}{k}\left(\frac{3}{6}mv_0^2 - \frac{1}{6}mv_0^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{3k}mv_0^2}$$

Así que la longitud mínima es $l = l_0 - \delta_{max} = l_0 - \sqrt{\frac{2}{3k}mv_0^2}$