Auxiliar 20

Lagrangiano a segundo orden, modos normales y SRNI

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi, Claudia San Martín

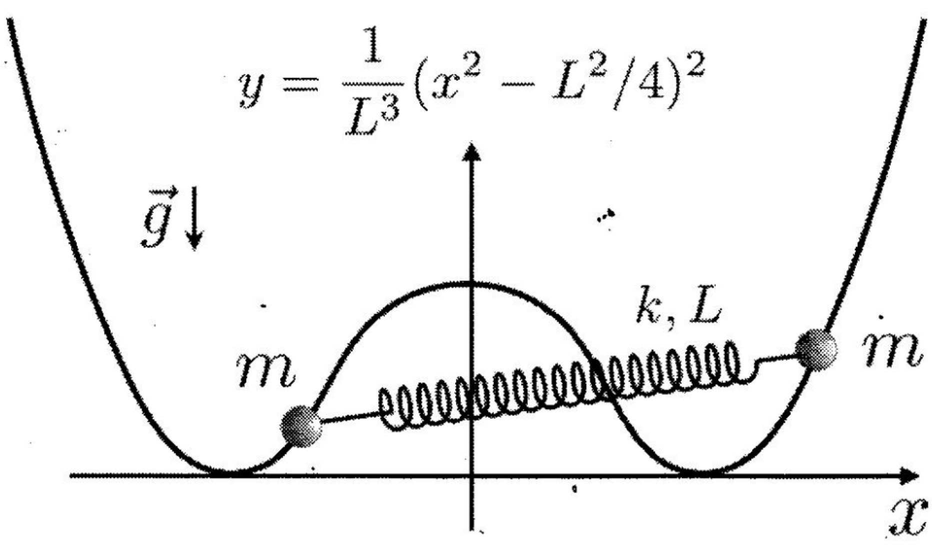
P1.-

Dos partículas de masa m están confinadas a moverse a lo largo de un alambre curvo descrito por la ecuación $y(x) = (x^2 - L^2/4)^2/L^3$. Estas permanecen comunicadas por medio de un resorte de largo natural L y constante elástica k, tal como lo muestra la figura. Se cumple que $m = kl/3g$.

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de pequeñas oscilaciones, en torno a los puntos de equilibrio $x_{\pm} = \pm L/2$

b) Determine los modos normales, junto con sus frecuencias

c) Si en tiempo $t = 0$ la primera partícula está en reposo en $x_1 = -L/2$ y la segunda cumple $\dot{x}_2 = v_0$ en $x_2 = +L/2$, determine el tiempo T mínimo que le toma al sistema en llegar a una configuración donde la segunda partícula se detiene en $x_2 = L/2$, mientras que la primera partícula oscila en torno a $x_1 = -L/2$

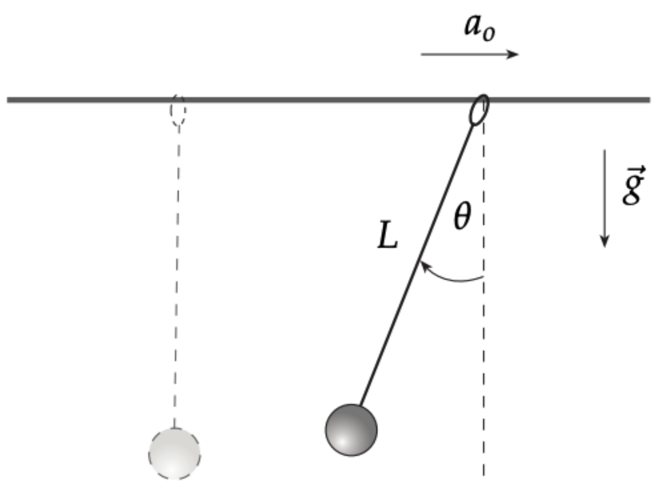


P2.-

Considere un péndulo simple de largo L y masa m que cuelga de un anillo que se puede mover libremente a lo largo de una barra horizontal. Estando el péndulo en reposo, se impulsa el anillo con una aceleración a_0 constante a lo largo de la barra. Determine:

a) Máxima desviación del péndulo con respecto a la vertical.

b) Tensión máxima que experimenta la cuerda y el ángulo con respecto a la vertical donde ésta se alcanza.



Formulario

Lagrangiano

El lagrangiano L se calcula como

$$L = K - U,$$

donde K es la energía cinética y U la energía potencial del sistema. Se debe considerar todas las partículas del sistema.
Las ecuaciones de Euler-Lagrange se calculan como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

donde q es una coordenada generalizada, puede ser: $q = x$, $q = \theta$, $q = r$, etc. Estas ecuaciones de E-L nos dan las ecuaciones de movimiento del sistema.

Modos normales

De tener un sistema de ecuaciones de movimiento con forma de M.A.S. vectorial, como el siguiente:

$$\ddot{\vec{r}} + \Omega^2 \, \vec{r} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{11}^2 & \Omega_{12}^2 & \cdots & \Omega_{1n}^2 \\ \Omega_{21}^2 & \Omega_{22}^2 & \cdots & \Omega_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1}^2 & \Omega_{n2}^2 & \cdots & \Omega_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pueden calcular sus modos normales de oscilación, que serían los autovalores de la matriz *cuadrada*, $\Omega_{n\times n}$. O sea, queremos encontrar los ω_i que cumplen la ecuación de valores propios:

$$\left(\Omega_{n\times n}^2 - \omega_i^2 I_{n\times n}\right) \vec{v}_i = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Omega_{11}^2 - \omega_i^2 & \Omega_{12}^2 & \cdots & \Omega_{1n}^2 \\ \Omega_{21}^2 & \Omega_{22}^2 - \omega_i^2 & \cdots & \Omega_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1}^2 & \Omega_{n2}^2 & \cdots & \Omega_{nn}^2 - \omega_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ \vdots \\ v_{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistema de referencia no inercial

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

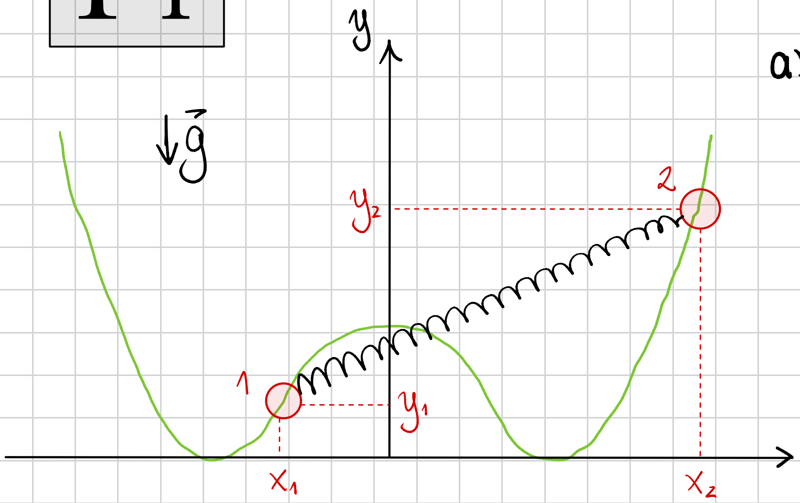
$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula;
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S';
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes **cartesianos** de S' c/r a los de S y
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Auxiliar 20

P1



a) Para encontrar las ecs. de mov. ocuparemos Lagrangian. Y como nos piden los modos normales de oscilación, ocuparemos pequeñas perturbaciones para aproximar el Lagrangiano a segundo orden/grado para que los EoM's sean de primer orden, o sea que tengan la forma de un M.A.S.

Primero calculemos la energía cinética de cada partícula. Ocupando coordenadas cartesianas tendríamos

▷ $K_1 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$ ▷ $K_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$

pero como ambas partículas se mueven por el riel, la coordenada x está relaciona con y, de la forma

$$y = \frac{1}{L^3}(x^2 - L^2/4)^2 = \frac{1}{L^3}[(x + L/2)(x - L/2)]^2 \quad (1)$$

que es una relación algo complicada, por lo que empezaremos a aproximar. Por intuición los puntos de equilibrio estables están en $x = L/2, -L/2$ (en los puntos más bajos del riel), por lo que consideraremos que el punto de eq. de 1 es $x_{01} = -L/2$ y el de 2 $x_{02} = L/2$.

Ahora consideramos que ambas partículas se mueven, ligeramente, en torno a sus puntos de equilibrio, o sea

- $x_1(t) = -L/2 + \delta x_1(t)$,
- $x_2(t) = L/2 + \delta x_2(t)$, con $|\delta x_1|, |\delta x_2| << 1 \ \forall t$

Reemplacemos estas expresiones en (1) donde solo nos quedaremos con términos de hasta δx^2

- $$y_1 = \frac{1}{L^3}[(\cancel{-L/2} + \delta x_1 + \cancel{L/2})(-L/2 + \delta x_1 - L/2)]^2$$
$$= \frac{1}{L^3}[\delta x_1^2 - \delta x_1 L]^2$$
$$= \frac{1}{L^3}[\underbrace{\cancel{\delta x_1^4}}_{\text{orden } 4} - 2L\underbrace{\cancel{\delta x_1^3}}_{\text{orden } 3} + L^2 \delta x_1^2]$$
$$\approx \frac{1}{L}\delta x_1^2$$

$$\circ \; y_2 = \frac{1}{L^3}\left[(L/2+\delta x_2+L/2)(L/2+\delta x_2-L/2)\right]^2$$
$$= \frac{1}{L^3}\left[\delta x_1^2 + L\,\delta x_1\right]^2$$
$$= \frac{1}{L^3}\left[\underbrace{\cancel{\delta x_1^4}}_{\text{orden 4}} + 2L\underbrace{\cancel{\delta x_1^3}}_{\text{orden 3}} + L^2\delta x_1^2\right]$$
$$\approx \frac{1}{L}\,\delta x_1^2$$

Así que las derivadas temporales de y_i en función de x_i serían

$$\circ \; \dot{y}_1 = \frac{2}{L}\,\delta x_1\,\delta\dot{x}_1 \qquad\qquad \circ \; \dot{y}_2 = \frac{2}{L}\,\delta x_2\,\delta\dot{x}_2$$

que reemplazamos en la energía cinética

$$K = \sum_{i=1}^{2} K_i = \frac{1}{2}m\left(\delta\dot{x}_1^2 + \frac{4}{L^2}\,\delta x_1^2\,\delta\dot{x}_1^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\delta\dot{x}_2^2 + \frac{4}{L^2}\,\delta x_1^2\,\delta\dot{x}_1^2\right)$$

sin embargo, notamos que las contribuciones de $\dot{y}_i^2$ son de la forma

$$\delta x^2\,\delta\dot{x}^2$$

que es un término de orden 4, por lo que los despreciamos. Finalmente, la energía cinética sería

$$\boxed{K = \frac{1}{2}m\,\delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\,\delta\dot{x}_2^2}$$

Ahora vayamos por la energía potencial. Tenemos dos contribuciones:

- Potencial gravitatoria: $U_g = mgy$
- Potencial elástica: $U_e = \frac{1}{2}k(r-L)^2$

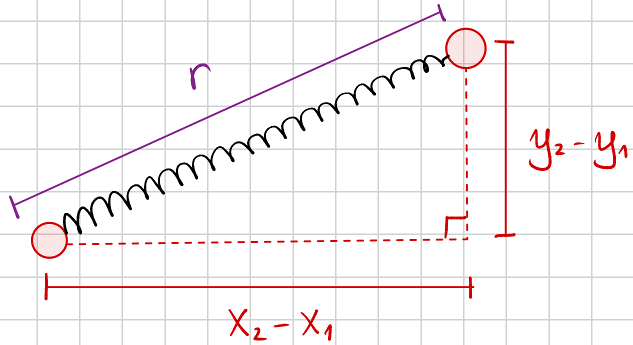
donde la gravitatoria total, en función de δx, sería

$$U_g = U_{g1} + U_{g2} = mgy_1 + mgy_2$$
$$= mg\frac{1}{L}\,\delta x_1^2 + mg\frac{1}{L}\,\delta x_2^2$$

que es una expresión de orden 2, así que no despreciamos nada.

Para la potencial elástica solo tenemos un resorte, por lo que será una sola contribución. Recordemos que el r de U_e es el largo del resorte, que geométricamente sería

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



que en función de las perturbaciones δx sería

$$r \approx \sqrt{\left(\frac{L}{2} + \delta x_2 + \frac{L}{2} - \delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2^2}{L} - \frac{\delta x_1^2}{L}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(L + \delta x_2 - \delta x_1)^2 + \frac{\delta x_2^4}{L^2} - \frac{2\,\delta x_1^2\,\delta x_2^2}{L^2} + \frac{\delta x_1^4}{L^2}} \quad (2)$$

Pensemos en (2) como una función de la forma $\sqrt{L^2 + \epsilon}$, donde ϵ representaría la suma de todos los términos de (2) sin contar el L^2, y que cumple $\epsilon \ll 1$, entonces si expandimos hasta orden 1 en ϵ

$$\sqrt{L^2 + \epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sqrt{L^2 + \epsilon}\right)^{(n)}\Big|_{\epsilon = 0} \cdot \epsilon^n \approx L + \frac{1}{2L}\epsilon$$

así que la energía elástica sería

$$U_e = \frac{1}{2} k (r - L)^2 \approx \frac{1}{2} k \frac{\epsilon^2}{4L^2}$$

donde ϵ aparece al cuadrado, y como tiene expresión

$$\epsilon = 2L\delta x_2 - 2L\delta x_1 + \delta x_2^2 + \delta x_1^2 - 2\delta x_1 \delta x_2 + \frac{\delta x_2^4}{L^2} - \frac{2\,\delta x_1^2\,\delta x_2^2}{L^2} + \frac{\delta x_1^4}{L^2}$$

solo sobrevivirán los términos de orden 1, ya que al cuadrado serían de orden 2. Entonces

$$U_e \approx \frac{1}{2} k \frac{1}{4L^2} 4L^2 (\delta x_2 - \delta x_1)^2$$

$$= \frac{1}{2} k (\delta x_2 - \delta x_1)^2,$$

que es una expresión de orden 2, como se desea.

Ya tenemos todo para expresar nuestro Lagrangiano cuadrático / orden 2

$$L = K - U = \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \delta\dot{x}_2^2 - mg\frac{1}{L}\delta x_1^2 - mg\frac{1}{L}\delta x_2^2 - \frac{1}{2}k(\delta x_2 - \delta x_1)^2$$

y para calcular las EoMs usamos E-L. Primero para δx_1

▷ $$\frac{\partial L}{\partial \delta x_1} = -\frac{2mg}{L}\delta x_1 + k(\delta x_2 - \delta x_1)$$

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}_1} = m\,\delta\dot{x}_1 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\%) = m\,\delta\ddot{x}_1$

$$\therefore \quad \boxed{\delta\ddot{x}_1 + 2\frac{g}{L}\,\delta x_1 - \frac{k}{m}(\delta x_2 - \delta x_1) = 0} \quad (3)$$

Y para δx_2 sería

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \delta x_2} = -2\dfrac{mg}{L}\,\delta x_2 - k(\delta x_2 - \delta x_1)$

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \delta\dot{x}_2} = m\,\delta\dot{x}_2 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\%) = m\,\delta\ddot{x}_2$

$$\therefore \quad \boxed{\delta\ddot{x}_2 + 2\frac{g}{L}\,\delta x_2 + \frac{k}{m}(\delta x_2 - \delta x_1) = 0} \quad (4)$$

donde (3) y (4) serían las EoMs de pequeñas oscilaciones.

b) Para calcular los modos normales de oscilación del sistema, tenemos que juntar (3) y (4) en una ec. matricial de la forma

$$\ddot{\vec{r}} + \Omega^2\,\vec{r} = 0$$

que en este caso sería

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2g/L + k/m & -k/m\\ -k/m & 2g/L + k/m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

que tomando $m = kL/3g$

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5g/L & -3g/L\\ -3g/L & 5g/L\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Los modos normales están dados por los autovalores de la matriz de 2×2 que acompaña a $\vec{r}$. La ec. de valores propios sería

$$\begin{vmatrix}5g/L - \omega^2 & -3g/L\\ -3g/L & 5g/L - \omega^2\end{vmatrix} = (5g/L - \omega^2)^2 - (3g/L)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5gL - \omega^2 = \pm 3g/L$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{2g}{L}, \frac{8g}{L}$$

Con esto conseguimos las frecuencias de oscilación, pero también necesitamos los autovectores para saber el sentido de oscilación.

$\boxed{\omega^2 = 2g/L}$

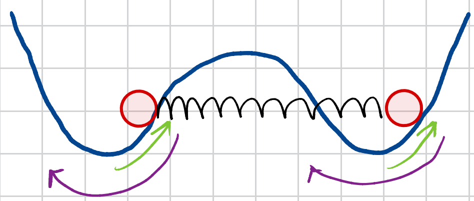
$$\begin{pmatrix} 5g/L - 2g/L & -3g/L \\ -3g/L & 5g/L - 2g/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3g}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ambas partículas oscilan en el mismo sentido

y normalizando

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



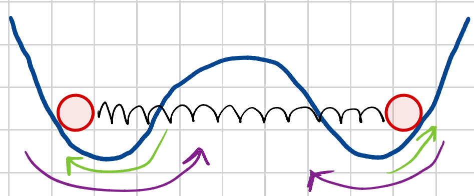
Y para la otra frecuencia

$\boxed{\omega^2 = 8g/L}$

$$-\frac{3g}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

las partículas oscilan en sentidos contrarios

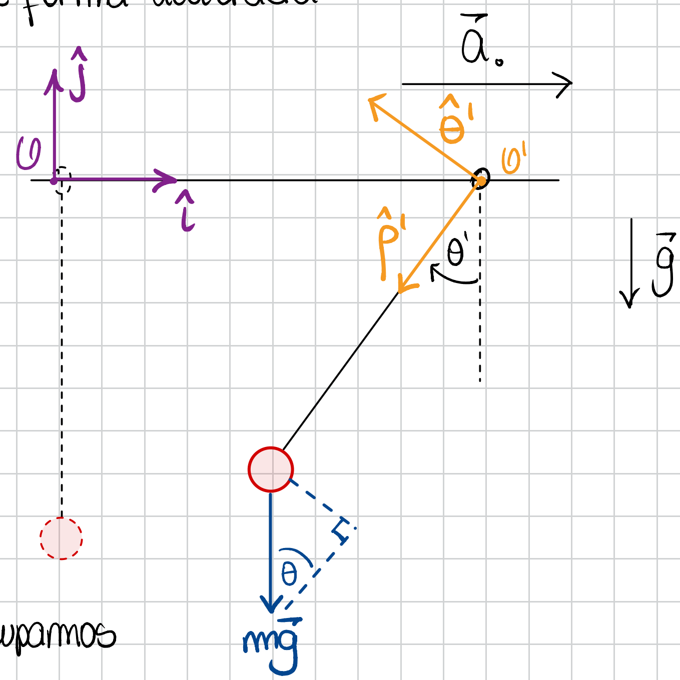
y normalizando $a_2 = 1/\sqrt{2}$



* Nota: Al principio puede ser complicado esto de las aproximaciones. Con la práctica aprenderán hasta dónde deben aproximar una función para que al juntarlas con las otras, les quede una expresión de máximo grado 2.

P2

Nosotros ocupamos SRNI cuando identificamos que el movimiento de la partícula es bastante fácil de describir con un sist. de coordenadas, pero el origen O' de este sistema se mueve de forma no inercial, o sea, de forma acelerada



Por ejemplo, en el presente problema tenemos que el movimiento de la partícula visto desde el sist. de referencia O', es simplemente el de un péndulo simple con largo cte. L.

El problema surge en que O' se está moviendo con aceleración $\vec{a}_0$, por lo que si ocupáramos solo este sist., ya no tendríamos las relaciones de las derivadas temporales de $\{\hat{\rho}', \hat{\theta}'\}$,

$$\frac{d\hat{\rho}'}{dt} \neq \dot{\theta}'\hat{\theta}' \quad \wedge \quad \frac{d\hat{\theta}'}{dt} \neq -\dot{\theta}'\hat{\rho}'.$$

Pero sí podemos ocupar este sistema $\{\hat{\rho}', \hat{\theta}'\}$ si ocupamos la fórmula maestra de esta unidad:

$$m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}',$$

donde

- $\sum_i \vec{F}_i$: la suma de las fuerzas reales
- $\vec{R}$: vector posición que va desde el origen O, hasta el origen O'
- $\vec{\Omega}$: velocidad angular con la que rota el sist. cartesiano fijo a O', c/r al sist. cartesiano de O
- $\vec{r}'$: vector posición que va desde O', hasta la partícula

Para resolver problemas de SRNI podemos seguir los siguientes pasos:

- ▷ Definir el sistema S' y la posición $\vec{r}'$, junto con sus derivadas
- ▷ Expresar $\vec{R}$ y derivarlo dos veces
- ▷ Definir la velocidad angular $\vec{\Omega}$
- ▷ Calcular las fuerzas reales $\vec{F}_i$
- ▷ Pasar todos los vectores de S al sistema S'

▷ Calcular cada término de la fórmula maestra

a) Ahora hagamos nuestro problema en específico

▷ Primer paso: S' y $\vec{r}\,'$

Como es un péndulo, ocupemos polares con origen en el extremo del péndulo, o sea, el sist. $\{\hat{\rho}', \hat{\theta}'\}$. Así que $\vec{r}\,'$ es

$$\vec{r}\,' = L\hat{\rho}'$$

y sus derivadas las calculamos de la forma usual, ya que ocuparemos la fórmula maestra,

$$\dot{\vec{r}}\,' = L\dot{\theta}'\hat{\theta}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}\,' = -L\dot{\theta}'^2\hat{\rho}' + L\ddot{\theta}'\hat{\theta}'$$

▷ Segundo paso: $\vec{R}$

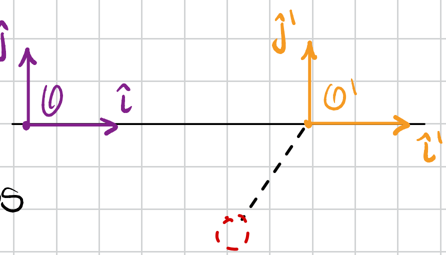
Tenemos que pensar en O' como si fuese una partícula, entonces ¿qué sistema de coord. inercial sería bueno para describir a esta "partícula"?

Ocuparemos el sistema S' del dibujo, que está fijo en algún punto de la vara y es cartesiano. En este caso no necesitamos expresar primero $\vec{R}$, ya que ya nos dan la aceleración con la que se mueve O', por lo que tenemos directamente que

$$\ddot{\vec{R}} = a\,\hat{\imath}$$

▷ Tercer paso: $\vec{\Omega}$

En este problema, si fijamos un sist. cartesiano en O', nos damos cuenta que no rotaría c/r al sist. cartesiano de S, como se ve en el dibujo de la derecha. Por lo que tenemos



$$\vec{\Omega} = \vec{0}$$

lo que hace que se simplifique mucho la ec. maestra, ahora tenemos solo:

$$m\ddot{\vec{r}}\,' = \sum_i \vec{F}_i - m\ddot{\vec{R}}$$

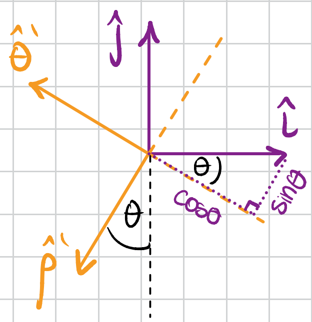
▷ Cuarto paso: Fuerzas reales

La partícula siente realmente solo: peso y tensión. Describamos estas fuerzas

$$m\vec{g} = mg\cos\theta'\hat{\rho}' - mg\sin\theta'\hat{\theta}' \quad \wedge \quad \vec{T} = -T\hat{\rho}'$$

▷ Quinto paso: Relacionar S y S'

Notamos que todas nuestras expresiones están en función de $\{\hat\rho', \hat\theta'\}$, menos $\ddot{\vec{R}} = a_0\hat\imath$, así que describamos $\hat\imath$ en función del sist. S'.



Solapando ambos sistemas notamos que

$$\hat\imath = -\sin\theta'\hat\rho' - \cos\theta'\hat\theta'$$

por lo que

$$\ddot{\vec{R}} = -a_0\sin\theta'\hat\rho' - a_0\cos\theta'\hat\theta'$$

▷ Sexto paso: Ec. maestra

Calculemos cada término de la ec. maestra reemplazando con lo ya encontrado

- $m\ddot{\vec{r}}' = m(-L\dot\theta'^2\hat\rho' + L\ddot\theta'\hat\theta')$
- $\sum_i \vec{F}_i = mg\cos\theta'\hat\rho' - mg\sin\theta'\hat\theta' - T\hat\rho'$
- $m\ddot{\vec{R}} = -ma_0\sin\theta'\hat\rho' - ma_0\cos\theta'\hat\theta'$

juntamos y

$$m(-L\dot\theta'^2\hat\rho' + L\ddot\theta'\hat\theta') = mg\cos\theta'\hat\rho' - mg\sin\theta'\hat\theta' - T\hat\rho' + ma_0\sin\theta'\hat\rho' + ma_0\cos\theta'\hat\theta'$$

con lo que obtuvimos nuestra EoM vectorial, y las escalares sería

$$\hat\rho')\quad -mL\dot\theta'^2 = mg\cos\theta' - T + ma_0\sin\theta'$$

$$\hat\theta')\quad mL\ddot\theta' = -mg\sin\theta' + ma_0\cos\theta'$$

Nos piden la máx. desviación c/r a la vertical, así que ocupemos $\hat\theta')$ e integrémosla

$$\dot\theta'\frac{d\dot\theta'}{d\theta'} = -\frac{g}{L}\sin\theta' + \frac{a_0}{L}\cos\theta' \quad // \int_0^\theta d\theta'$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot\theta} \dot\theta' d\dot\theta' = -\frac{g}{L}\int_0^\theta \sin\theta' d\theta' + \frac{a_0}{L}\int_0^\theta \cos\theta' d\theta'$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot\theta'^2}{2} = \frac{g}{L}(\cos\theta - 1) + \frac{a_0}{L}\sin\theta$$

y el ángulo máximo se alcanza cuando $\dot\theta = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{g}{L}(\cos\theta^* - 1) + \frac{a_0}{L}\sin\theta^*$$

$$\Leftrightarrow -\cos\theta^* = \frac{a_0}{g}\sin\theta^* - 1 \qquad /(\ )^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta^* = \frac{a_0^2}{g^2}\sin^2\theta^* - 2\frac{a_0}{g}\sin\theta^* + 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} - \sin^2\theta^* = \frac{a_0^2}{g^2}\sin^2\theta^* - 2\frac{a_0}{g}\sin\theta^* + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sin\theta^* \cdot \left[\sin\theta^*\left(\frac{a_0^2}{g^2}+1\right) - 2\frac{a_0}{g}\right] \qquad / \ \theta^*=0 \text{ es la C.I., la descartamos}$$

$$\Rightarrow 0 = \sin\theta^*\left(\frac{a_0^2}{g^2}+1\right) - 2\frac{a_0}{g}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta^* = \arcsin\left[\frac{2a_0}{g}\left(\frac{a_0^2}{g^2}+1\right)^{-1}\right]}$$

b) Para una expresión de T ocupamos $\hat{\rho}'$)

$$T = mg\cos\theta' + ma_0\sin\theta' + mL\dot{\theta}^2$$

$$= mg\cos\theta' + ma_0\sin\theta' + 2mg(\cos\theta - 1) + 2ma_0\sin\theta$$

$$= 3mg\cos\theta' + 3ma_0\sin\theta' - 2mg$$

y para encontrar su máximo derivamos e igualamos a 0

$$\left.\frac{dT}{d\theta}\right|_{\bar{\theta}} = -3mg\sin\bar{\theta} + 3ma_0\cos\bar{\theta} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \bar{\theta} = \arctan\left(\frac{g}{a_0}\right)$$

y reemplazando en T

$$\boxed{T_{max} = T(\theta'=\bar{\theta}) = 3mg\cos\left(\arctan\left(\frac{g}{a_0}\right)\right) + 3ma_0\sin\left(\arctan\left(\frac{g}{a_0}\right)\right) - 2mg}$$

* Importante aclarar que lo más común es que se tenga $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$. Ya veremos problemas de este estilo