Auxiliar 20

Lagrangiano y modos normales

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

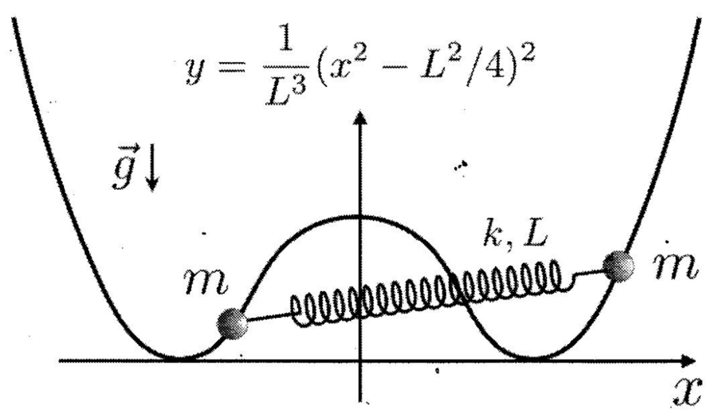
P1.-

Dos partículas de masa m están confinadas a moverse a lo largo de un alambre curvo descrito por la ecuación $y(x) = (x^2 - L^2/4)^2/L^3$. Estas permanecen comunicadas por medio de un resorte de largo natural L y constante elástica k, tal como lo muestra la figura. Se cumple que $m = kl/3g$.

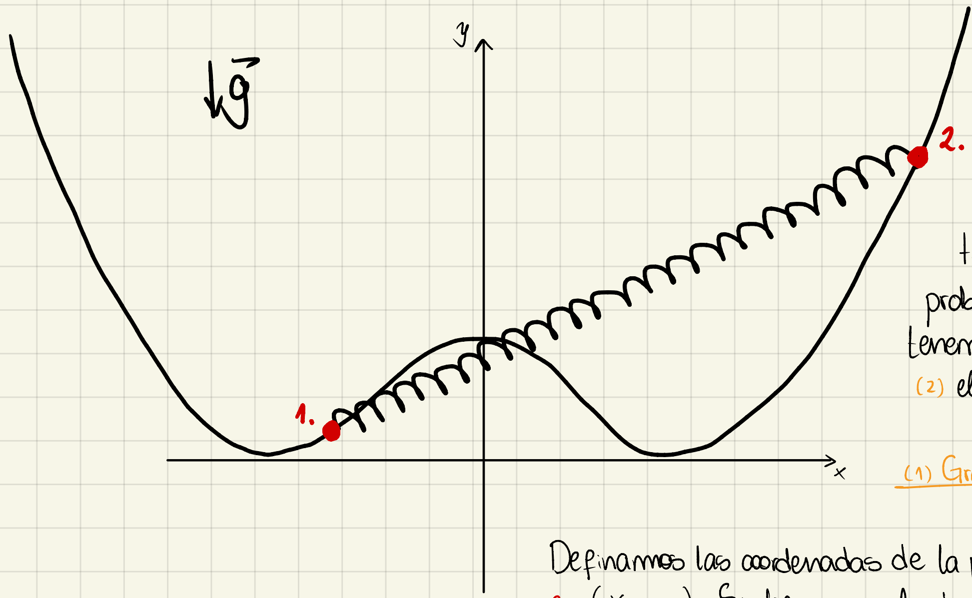
a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de pequeñas oscilaciones, en torno a los puntos de equilibrio $x_{\pm} = \pm L/2$

b) Determine los modos normales, junto con sus frecuencias

c) Si en tiempo $t = 0$ la primera partícula está en reposo en $x_1 = -L/2$ y la segunda cumple $\dot{x}_2 = v_0$ en $x_2 = +L/2$, determine el tiempo T mínimo que le toma al sistema en llegar a una configuración donde la segunda partícula se detiene en $x_2 = L/2$, mientras que la primera partícula oscila en torno a $x_1 = -L/2$



P1 Auxiliar 20



Para ocupar ec. de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

tenemos que expresar el lagrangiano de nuestro problema. Empecemos con la energía potencial, tenemos dos contribuciones: (1) Gravitacional y (2) elástica.

(1) Gravitacional

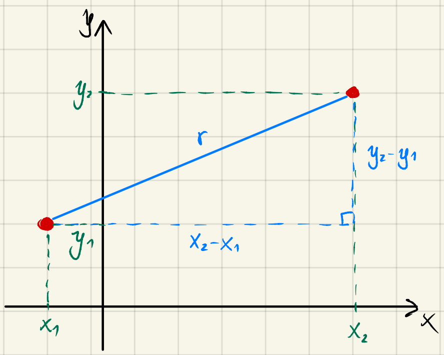
Definamos las coordenadas de la partícula 1. como (x_1, y_1) y para la partícula 2. (x_2, y_2). Si definimos el potencial gravitatorio U_g como cero en $y=0$, entonces

$$U_g = U_{g1} + U_{g2} = mgy_1 + mgy_2 \quad (1)$$

(2) Elástica

La energía potencial elástica está dada por la distancia entre sus extremos, r, y sus constantes de fabricación k, L

$$U_e = \frac{1}{2}k(r-L)^2$$



En este caso r lo calculamos con pitágoras $r = \left((y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2}k\left(\left((y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2\right)^{1/2} - L\right)^2 \quad (2)$$

Ahora, las coordenadas x e y de una misma partícula no son independientes entre sí, si no que por enunciado

$$y = \frac{1}{L^3}(x^2 - L^2/4)^2 = \frac{1}{L^3}(x-L/2)^2(x+L/2)^2 \quad (3)$$

y al reemplazar en (2) quedará algo no muy bonito. Así que empecemos con las perturbaciones, por enunciado los equilibrios se darán en $x_0 = \pm L/2$ (tiene lógica), entonces tomemos una pequeña variación

$$x_i = x_{0,i} + \delta x_i \ , \ \text{con } |\delta x_i| \ll 1$$

reemplazando en (3) $y_1(x_1 = -L/2 + \delta x_1) = \frac{1}{L^3}(-L/2 + \delta x_1 - L/2)^2(-\cancel{L/2} + \delta x_1 + \cancel{L/2})^2 = \frac{1}{L^3}(\delta x_1^2 - 2L\delta x_1 + L^2)\,\delta x_1^2$

$$= \frac{1}{L^3}\overset{\sim 0}{\cancel{\delta x_1^4}} - \frac{2}{L^2}\overset{\sim 0}{\cancel{\delta x_1^3}} + \frac{1}{L}\delta x_1^2 \approx \frac{\delta x_1^2}{L}$$

$$\triangleright\ y_2(x_2 = L/2 + \delta x_2) = \frac{1}{L^3}(L/2+\delta x_2 - L/2)^2(L/2+\delta x_2 + L/2)^2$$

$$= \frac{1}{L^3}\left(\overset{\delta x^2 \gg}{\cancel{\delta x_2^4}} + 2L\overset{\delta x^2 \gg}{\cancel{\delta x_2^3}} + L^2\delta x_2^2\right) \approx \frac{\delta x_2^2}{L}$$

Ahora si reemplacemos estos y_i en (1) y (2)

$$\boxed{\square\ U_g \approx \frac{mg}{L}\delta x_1^2 + \frac{mg}{L}\delta x_2^2}$$

$$\square\ U_e \approx \frac{1}{2}k\left[\sqrt{\left(\frac{\delta x_2^2}{L} - \frac{\delta x_1^2}{L}\right)^2 + (L/2 + \delta x_2 - (-L/2 + \delta x_1))^2} - L\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\sqrt{\frac{\delta x_2^4}{L^2} - \frac{2\delta x_1^2\delta x_2^2}{L^2} + \frac{\delta x_1^4}{L^2} + (L + \delta x_2 - \delta x_1)^2} - L\right]^2$$

notamos que los primeros dos términos dentro de la raíz son de orden 4, por lo que son despreciables frente a los términos que saldrían de $(L + \delta x_2 - \delta x_1)^2$ (orden 2)

$$\Rightarrow \boxed{U_g \approx \frac{1}{2}k\left[\sqrt{(L+\delta x_2 - \delta x_1)^2} - L\right]^2 = \frac{1}{2}k[\delta x_2 - \delta x_1]^2}$$

Ya con la energía potencial lista, debemos ir por la energía cinética, que en cartesianas sería

$$K = \Sigma_i K_i = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (4)$$

que considerando la perturbación $x_i = x_{0i} + \delta x_i \Rightarrow \dot{x}_i = \delta\dot{x}_i$ y la otra perturbación

$$y_i \approx \frac{\delta x_i^2}{L} \Rightarrow \dot{y}_i = \frac{2}{L}\delta x_i\,\delta\dot{x}_i$$

reemplazamos en (4) $K = \frac{1}{2}m\left[\delta\dot{x}_1^2 + \frac{4}{L^2}\delta x_1^2\delta\dot{x}_1^2\right] + \frac{1}{2}m\left[\delta\dot{x}_2^2 + \frac{4}{L^2}\delta x_2^2\delta\dot{x}_2^2\right]$

donde los términos $\delta x_i^2\delta\dot{x}_i^2$ serían mucho más pequeños que $\delta\dot{x}_i^2$, así que los despreciamos

$$\Rightarrow \boxed{K \approx \frac{1}{2}m\delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\delta\dot{x}_2^2}$$

Finalmente, nuestro lagrangiano sería

$$L = K - U \approx \underline{\frac{1}{2}m\delta\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\delta\dot{x}_2^2} - \underline{\frac{mg}{L}\delta x_1^2 - \frac{mg}{L}\delta x_2^2 - \frac{1}{2}k[\delta x_2 - \delta x_1]^2} \quad (*)$$

Calculamos las ecs. de E-L para encontrar las ecs. de movimiento para δx_i

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial \delta x_1} = -\frac{2mg}{L}\delta x_1 + k[\delta x_2 - \delta x_1]$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial(\delta x_2)} = -\frac{2mg}{L}\delta x_2 - k[\delta x_2 - \delta x_1]$$

$$\square\ \frac{\partial L}{\partial(\delta\dot{x}_1)} = m\delta\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(\delta\dot{x}_1)}\right) = m\delta\ddot{x}_1$$

$$\square\ \frac{\partial L}{\partial(\delta\dot{x}_2)} = m\delta\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(\delta\dot{x}_2)}\right) = m\delta\ddot{x}_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta\ddot{x}_1 + \frac{5g}{L}\delta x_1 - \frac{3g}{L}\delta x_2 = 0 \\ &\delta\ddot{x}_2 + \frac{5g}{L}\delta x_2 - \frac{3g}{L}\delta x_1 = 0 \end{aligned}} \quad (5)$$

Notamos que obtuvimos sist. de ecs. de mov. lineales, así que estamos bien. Ahora expresemos este sistema de dos EDOs/EOMs como un sistema matricial de la forma

$$\ddot{\vec{r}} + \Omega^2\vec{r} = 0$$

donde $\vec{r}$ es un vector de 2 elementos y Ω^2 una matriz de 2×2, viendo (5) tenemos

$$\overbrace{\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix}}^{\ddot{\vec{r}}} + \overbrace{\begin{pmatrix}5g/L & -3g/L\\ -3g/L & 5g/L\end{pmatrix}}^{\Omega^2}\overbrace{\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix}}^{\vec{r}} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad (6)$$

Este sist. de EOMs puede resolverse utilizando un ansatz de movimiento oscilatorio $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$ donde $\vec{r}_0$ es un vector constante y ω sería la frecuencia a la que se moverían las masas. Reemplazamos este ansatz en (6)

$$\Rightarrow -\omega^2\vec{r}_0 e^{i\omega t} + \Omega^2\vec{r}_0 e^{i\omega t} = 0 \quad / \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow (\Omega^2 - \omega^2)\vec{r}_0 = 0$$

y para que exista solución imponemos $\det(\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}_{2\times 2}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}5g/L - \omega^2 & -3g/L\\ -3g/L & 5g/L - \omega^2\end{vmatrix} = (5g/L - \omega^2)^2 - 9g^2/L^2 = 0$$

hacemos el c.v. $\tilde{\omega} = \omega^2 \Rightarrow 5g/L - \omega^2 = \pm 3g/L \Rightarrow \omega^2 = \frac{5g}{L} \mp \frac{3g}{L} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{2g}{L} \wedge \omega_2^2 = \frac{8g}{L}$

Ya que tenemos los autovalores, $\omega^2_{1,2}$, podemos calcular los autovectores que deben cumplir

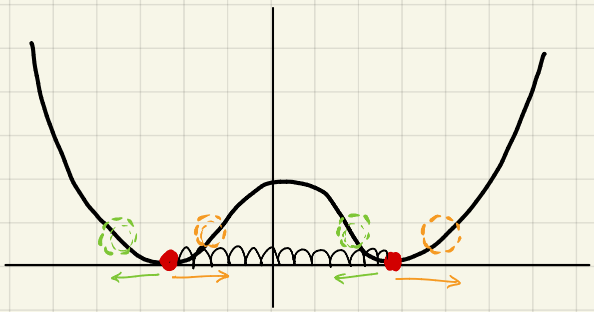
$$\left(\Omega^2 - \omega^2_{1,2}\mathbb{1}_{2\times 2}\right)\begin{pmatrix}a_{1,2}\\ b_{1,2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

evaluemos para los dos ω_i^2:

▷ $\omega_1^2 = 2g/L$ $\quad \begin{pmatrix} 5g/L - 2g/L & -3g/L \\ -3g/L & 5g/L - 2g/L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{3g}{L}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{3g}{L}\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ -a_1 + b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = b_1$$

$\therefore \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, normalizando $a_1(1 \ \ 1) \cdot a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1^2 \cdot 2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

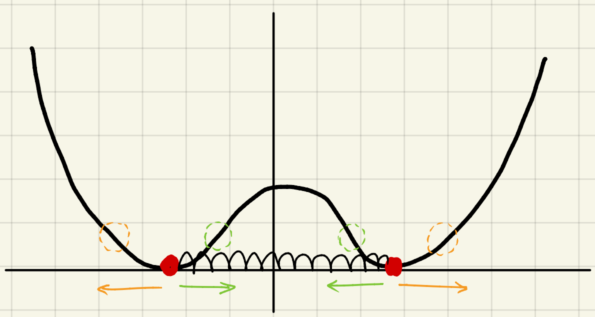


Oscilan en el mismo sentido

▷ $\omega_2^2 = 8g/L$ $\quad \begin{pmatrix} 5g/L - 8g/L & -3g/L \\ -3g/L & 5g/L - 8g/L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = -\frac{3g}{L}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$= -\frac{3g}{L}\begin{pmatrix} a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = -b_2$$

$\therefore \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, normalizando $a_2^2(1 \ \ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a_2^2 \cdot 2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Oscilan en sentidos contrarios

(c) Solo tenemos fuerzas conservativas, por lo que se conserva la energía mecánica

$$E_0 = E_f$$

en $t=0$ solo hay contribución de la velocidad de la partícula 2, ya que si parten en $x_1 = -L/2$ y $x_2 = L/2$, el resorte está en su largo natural y ambas partículas se encuentran en $y=0$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

mientras que para $t = t_f$, la partícula 2 está detenida y en $x_2 = L/2$ así que no contribuye a la energía, mientras que la partícula 1 ahora comenzó a moverse y a oscilar (pequeña oscilación) en torno a $-L/2$

$$\Rightarrow x_1(t) = -L/2 + \delta x_1(t) \Rightarrow \dot{x}_1 = \delta \dot{x}_1$$

así que solo esta masa contribuiría a la energía

$$E_p = \frac{1}{2} m \delta \dot{x}_1^2 + \frac{mg}{L} \delta x_1$$

imponiendo conservación $\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \delta \dot{x}_1^2 + \frac{mg}{L} \delta x_1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d(\delta x_1)}{dt}\right)^2 = v_0^2 - \frac{2g}{L} \delta x_1^2 \Leftrightarrow \frac{d(\delta x_1)}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{2g}{L} \delta x_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\delta x_1)}{(v_0^2 - 2g\delta x_1^2/L)^{1/2}} = \pm dt \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int_0^{\delta x_1} \frac{d(\delta x_1)}{(v_0^2 - 2g\delta x_1^2/L)^{1/2}} = \pm \int_0^T dt$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{L}{2g}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2g}{L v_0^2}}\, \delta x_1\right)\Bigg|_0^{\delta x_1} = T$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{L}{2g}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2g}{L v_0^2}}\,(x_1 + L/2)\right)$$