Auxiliar 20

Sistemas de referencia no inerciales

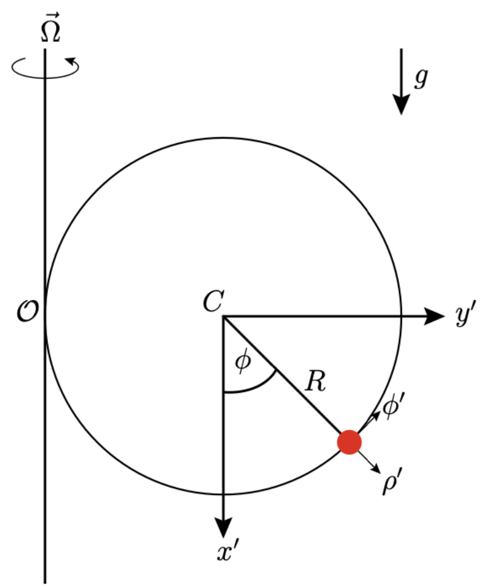
Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- Un aro de radio R, gira en torno a un eje vertical tangente al aro en el punto O con velocidad angular Ω constante. Una partícula P de masa m puede moverse a lo largo del aro sin roce alguno. Se define un sistema de referencia no inercial S' centrado en el centro C del aro y con ejes x' y y' en el plano del aro como indica la figura.

(a) Escriba la ecuación de movimiento de P y su proyección a la dirección $\hat{\phi}'$ en la forma $mR\ddot{\phi} = f$

(b) Obtenga la energía potencial U que se calcula como $f = -\frac{1}{R}\frac{dU}{d\phi}$

(c) Suponiendo que $R\Omega^2 << g$ y que el punto de equilibrio es cercano a cero, determine de forma aproximada este ángulo



P2.- Considere el sistema Sol-Tierra, con la masa del Sol mucho mayor a la de la Tierra, $M >> m$, ambos sujetos únicamente a la fuerza de gravitación mutua. Defina un sistema de referencia inercial S con origen en el centro del Sol, de vectores unitarios $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. Defina también un sistema de referencia no inercial S', con el mismo origen pero con vectores unitarios $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}')$. El sistema de referencia S' es tal que su eje x' está fijo a la Tierra y por lo tanto rota con respecto a los ejes coordenados del sistema S según $\vec{\omega} = \dot{\phi}(t)\hat{k}$. Demuestre que usando la ecuación de movimiento en el sistema de referencia no inercial S', se pueden deducir las ecuaciones diferenciales del problema de gravitación del sistema Sol-Tierra, esto es:

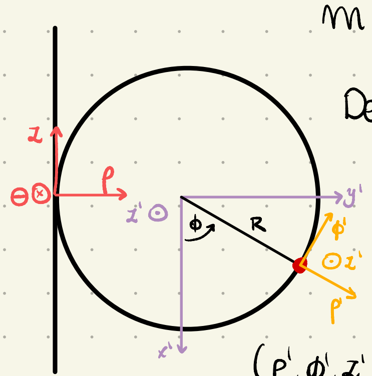
$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \qquad \wedge \quad m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{l^2}{mr^3}$$

Auxiliar 20

P1

a. Para sist. no inerciales tenemos la siguiente ecuación que considera fuerzas reales y ficticias

$$m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\vec{v}\,'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,'}_{\text{azimutal}} \quad (1)$$



Definamos la posición del SRNI c/r al SRI

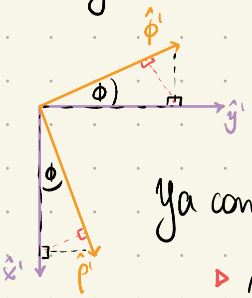
$$\vec{R} = R\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = R\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \cancel{R\ddot{\theta}\hat{\theta}} - R\dot{\theta}^2\hat{\rho},$$

donde $\hat{\theta} = -\hat{k}'$ y $\hat{\rho} = \hat{y}'$.

La posición de la partícula de interés c/r al SRNI

$$\vec{r}\,' = R\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}\,' = R\dot{\phi}\hat{\phi}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}\,' = R\ddot{\phi}\hat{\phi}' - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}'$$

Como $\vec{\Omega}$ está en $\hat{x}'$, debemos pasar $(x',y',z') \longrightarrow (\rho',\phi',z')$ o $(\rho',\phi',z') \rightarrow (x',y',z')$, ya que debemos hacer los productos cruz y punto, hacemos el segundo



Si queremos hacer $(\rho',\phi',z') \rightarrow (x',y',z')$ debemos formar triángulos rectángulos donde ρ' y ϕ' sean las hipotenusas

$$\hat{\phi}' = -\sin\phi\,\hat{x}' + \cos\phi\,\hat{y}'$$
$$\hat{\rho}' = \cos\phi\,\hat{x}' + \sin\phi\,\hat{y}'$$

Ya con la partícula descrita en el SRNI, calculamos las fuerzas ficticias

▷ $m\ddot{\vec{R}} = -mR\Omega^2\hat{\rho} = -mR\Omega^2\hat{y}' = -mR\Omega^2(\sin\phi\,\hat{\rho}' + \cos\phi\,\hat{\phi}')$

▷ $m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') = -m\Omega\hat{x}'\times(-\Omega\hat{x}'\times R\hat{\rho}')$

$= m\Omega^2 R\,\hat{x}'\times(\hat{x}'\times(\cancel{\cos\phi\,\hat{x}'} + \sin\phi\,\hat{y}'))$

$= m\Omega^2 R\,\hat{x}'\times\sin\phi\,\hat{k}' = -m\Omega^2 R\sin\phi\,\hat{y}' = -m\Omega^2 R\sin\phi(\sin\phi\,\hat{\rho}' + \cos\phi\,\hat{\phi}')$

▷ $2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}\,' = -2m\Omega\hat{x}'\times R\dot{\phi}\hat{\phi}'$

$= -2m\Omega R\dot{\phi}\,\hat{x}'\times(\cancel{-\sin\phi\,\hat{x}'} + \cos\phi\,\hat{y}') = -2m\Omega R\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{k}'$

▷ $-m\cancel{\dot{\vec{\Omega}}}\times\vec{r}\,' = 0$

Mientras que las fuerzas reales son las normales ejercidas por el anillo sobre la masa en las componentes de $-\hat{\rho}'$ y $-\hat{k}'$, y la fuerza peso en $\hat{x}'$

▷ $\vec{N}_{\rho'} = -N_{\rho'}\hat{\rho}'$

▷ $\vec{N}_{k'} = -N_{k'}\hat{k}'$

▷ $m\vec{g} = mg\hat{x}' = mg(\cos\phi\,\hat{\rho}' - \sin\phi\,\hat{\phi}')$

Juntamos todo en (1)

$$m\ddot{\vec{r}}\,' = -N_{\rho'}\hat{\rho}' - N_{k'}\hat{k}' + mg(\cos\phi\,\hat{\rho}' - \sin\phi\,\hat{\phi}') + mR\Omega^2(\sin\phi\,\hat{\rho}' + \cos\phi\,\hat{\phi}')$$
$$+ m\Omega^2 R\sin\phi(\sin\phi\,\hat{\rho}' + \cos\phi\,\hat{\phi}') + 2m\Omega R\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{k}'$$

Como $\ddot{\vec{r}}\,' = R\ddot{\phi}\hat{\phi}' - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}'$, tomamos solo los términos que acompañen a $\hat{\phi}$ para igualarlo con $mR\ddot{\phi}$

$$\Rightarrow mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi + mR\Omega^2\cos\phi + mR\Omega^2\sin\phi\cos\phi$$

b. Calculamos U como $-\frac{1}{R}\frac{dU}{d\phi} = -mg\sin\phi + mR\Omega^2\cos\phi + mR\Omega^2\sin\phi\cos\phi \quad \Big/ \int^{\phi} d\phi$

$$-\frac{U}{R} = mg\cos\phi + mR\Omega^2\sin\phi + \frac{mR\Omega^2}{2}\sin^2\phi + C_1$$

$$U = -mgR\cos\phi - mR^2\Omega^2\sin\phi - \frac{1}{2}mR^2\Omega^2\sin^2\phi$$

como hablamos de energía potencial fijamos el 0 en cualquier parte $\Rightarrow c_1 \stackrel{!}{=} 0$

c. Sabemos que los mínimos de la energía potencial son puntos de equilibrio del sistema, así que derivemos e igualemos a 0

$$\Rightarrow \left.\frac{dU}{d\phi}\right|_{\phi_{eq}} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \cancel{m}g\cancel{R}\sin\phi_{eq} - \cancel{m}R^{\cancel{2}}\Omega^2\cos\phi_{eq} - \cancel{m}R^{\cancel{2}}\Omega^2\sin\phi_{eq}\cos\phi_{eq} \stackrel{!}{=} 0$$

$$g\sin\phi_{eq} - R\Omega^2\cos\phi_{eq} - R\Omega^2\sin\phi_{eq}\cos\phi_{eq} = 0$$

como ϕ_{eq} es cercano a 0, $\phi_{eq} \ll 1$, podemos considerar las aproximaciones

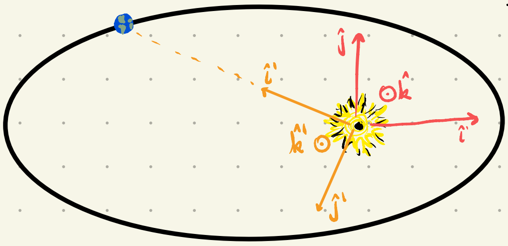
$$\sin\phi_{eq} \hat{=} \phi_{eq} \quad \wedge \quad \cos\phi_{eq} \hat{=} 1$$

$$\Rightarrow g\phi_{eq} - R\Omega^2 - R\Omega^2\phi_{eq} = \phi_{eq}(g - R\Omega^2) - R\Omega^2 = 0$$

$$\phi_{eq} = \frac{R\Omega^2}{g - R\Omega^2}$$

si consideramos $R\Omega^2 \ll g \Rightarrow \phi_{eq} \approx \frac{R\Omega^2}{g}$

P2



En este sistema tenemos que $\vec{R} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$. La posición de la Tierra se describe (con respecto al SRNI $(\hat{i}',\hat{j}',\hat{k}')$) como

$$\vec{r}' = r\hat{i}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{r}\hat{i}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{i}'$$

calculamos las fuerzas ficticias

- $-m\ddot{\vec{R}} = 0$
- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\dot{\phi}\hat{k}'\times(\dot{\phi}\hat{k}'\times r\hat{i}')$
  $= -m\dot{\phi}^2 r\hat{k}'\times\hat{j}' = m\dot{\phi}^2 r\hat{i}'$
- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m\dot{\phi}\hat{k}'\times\dot{r}\hat{i}' = -2m\dot{\phi}\dot{r}\hat{j}'$
- $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = -m\ddot{\phi}\hat{k}'\times r\hat{i}' = -mr\ddot{\phi}\hat{j}$

La única fuerza real es la gravedad $\Rightarrow m\vec{a} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{i}'$, juntamos todo

$$\Rightarrow m\ddot{r}\hat{i}' = -\frac{GmM}{r^2}\hat{i}' + m\dot{\phi}^2 r\hat{i}' - 2m\dot{\phi}\dot{r}\hat{j}' - mr\ddot{\phi}\hat{j}$$

$\hat{i}'$) $m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + m\dot{\phi}^2 r$

momentum angular constante

$\hat{j}'$) $0 = -2m\dot{\phi}\dot{r} - mr\ddot{\phi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\phi} = l$

Por lo que la función escalar en $\hat{i}'$ nos queda $m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{l^2}{mr^3}$ □

* Notar que debido a $M \gg m$ (el Sol tiene una masa $\sim 10^{30}$ kg y la Tierra $\sim 10^{24}$ kg) es que podemos considerar que la Tierra no afecta en la posición del Sol, por lo que el Sol se encuentra en un SRI