Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3111 – Mecánica Clásica

Auxiliar 1

Fuerzas de restricción

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: Fernando Lobos

P1.-

Considere una partícula de masa m que se mueve por un paraboloide de revolución (sin despegarse) en presencia de gravedad. Para describir el movimiento utilice coordenadas parabólicas, donde la relación con las coordenadas cartesianas es:

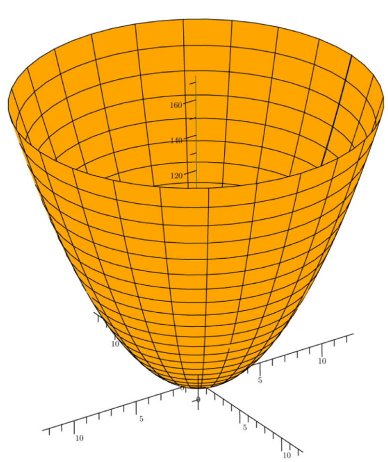
$$x = uv\cos\phi$$
$$y = uv\sin\phi$$
$$z = (u^2 - v^2)/2$$

donde de forma general $u \in [0,\infty)$, $v \in [0,\infty)$ y $\phi \in [0,2\pi)$ (este último es el mismo ángulo de coordenadas cilíndricas), pero utilizaremos $v = v_0$ constante para considerar un paraboloide como el de la imagen.

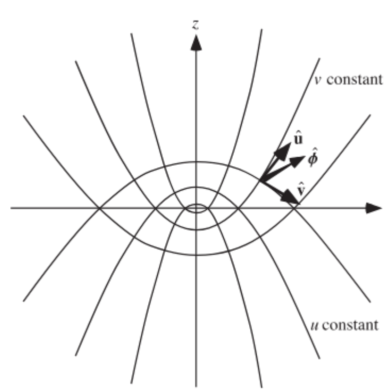
a) Encuentre el Lagrangeano y las ecuaciones de movimiento

b) Encuentre la(s) fuerza(s) de ligazón

c) Encuentre la condición para tener órbitas circulares y encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a una órbita circular



(a) Paraboloide de revolución

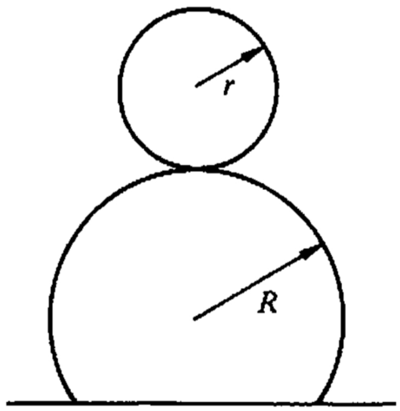


(b) Coordenadas parabólicas

P2.-

Un **aro** de masa m y radio r rueda sin resbalar en un **cilindro fijo** de radio R, como se muestra en la figura. La única fuerza externa es la gravedad. Considere que el aro empieza a rodar, con una velocidad inicial despreciable, desde el punto más alto del cilindro grande.

a) Ocupe el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar la ecuación de movimiento del sistema y la expresión de las fuerzas de restricción. Con esto encuentre el punto donde el aro se despega del cilindro



Multiplicadores de Lagrange

Si además de obtener las ecuaciones de movimiento de un problema, queremos calcular las **fuerzas de restricción**, utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i}\,,$$

donde L es el Lagrangeano del sistema (sin haber hecho explícitas las restricciones geométricas), f_a son las **restricciones geométricas** del problema y q_i las coordenadas generalizadas.

Luego de hacer las derivadas y reemplazar con las restricciones f_a, las fuerzas de restricción serían iguales a los multiplicadores, $F_a = \lambda_a$.

Sólido rígido

La energía cinética de un sólido rígido puede ser expresada como:

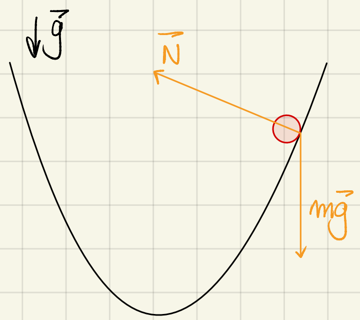
$$K = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}_{\mathrm{CM}}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\mathrm{CM}}\vec{\Omega}\,,$$

donde M es la masa total del sólido, $\vec{R}_{\mathrm{CM}}$ es el vector posición del Centro de Masa (CM), $\vec{\Omega}$ el vector velocidad angular del sólido y I_{CM} el tensor de inercia medido con respecto al CM.

En este link pueden ver un listado de **algunas componentes** (I_{CM} es una matriz de 3×3) de los sólidos rígidos más comunes.

Auxiliar 1

P1



a) En este primer ítem nos piden encontrar las ecs. de movimiento, por lo que todavía no debemos ocupar multiplicadores de Lagrange (para calcular fuerzas de restricción y el cálculo es más sencillo.

Lo primero que debemos hacer al utilizar Lagrangiano es saber la cantidad de grados de libertad de nuestro problema, en este caso son 2 debido a que la altura de la partícula está dada directamente por las coord. x e y

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \longleftarrow \text{ec. paraboloide de revolución}$$

entonces cualquier cambio de variables / coord. debe mantener que solo dos variables / coord. son independientes. Ahora construyamos el Lagrangiano

Tenemos que la partícula puede moverse en los 3 ejes cartesianos, por lo que su energía cinética en cartesianas es

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

y debemos expresarla en coord. parabólicas donde $v = v_0 \Rightarrow \dot{v} = 0$

- $\dot{x} = \dot{u}v_0\cos\phi - uv\sin\phi\dot{\phi}$
- $\dot{y} = \dot{u}v_0\sin\phi + uv_0\cos\phi\dot{\phi}$
- $\dot{z} = u\dot{u}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left((\dot{u}v_0\cos\phi - uv_0\sin\phi\dot{\phi})^2 + (\dot{u}v_0\sin\phi + uv_0\cos\phi\dot{\phi})^2 + u^2\dot{u}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\underset{\mathrm{I}}{\dot{u}^2v_0^2\cos^2\phi} - \cancel{2u\dot{u}v_0^2\cos\phi\sin\phi\dot{\phi}} + \underset{\mathrm{II}}{u^2v_0^2\sin^2\phi\dot{\phi}^2} + \underset{\mathrm{I}}{\dot{u}^2v_0^2\sin^2\phi} + \cancel{2u\dot{u}v_0^2\cos\phi\sin\phi\dot{\phi}} + \underset{\mathrm{II}}{u^2v_0^2\cos^2\phi\dot{\phi}^2} + u^2\dot{u}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{u}^2v_0^2 + u^2v_0^2\dot{\phi}^2 + u^2\dot{u}^2)$$

La única contribución a la energía potencial es la potencial gravitatoria $U = mgz$, considerando $U(z=0) \overset{!}{=} 0$, que en coord. parabólicas sería:

$$U(u) = \frac{mg}{2}(u^2 - v_0^2)$$

entonces nuestro Lagrangeano tiene la forma:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2v_0^2 + u^2v_0^2\dot{\phi}^2 + u^2\dot{u}^2) - \frac{mg}{2}(u^2 - v_0^2) \quad (1)$$

Ahora debemos calcular las ecs. de E-L

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

donde nuestras coord. generalizadas serían $q_1 = u$ y $q_2 = \phi$ (solo son 2 grados de libertad). Notamos de (1) que el Lagrangeano no depende de ϕ explícitamente lo que implica conservación del momentum generalizado asociado a esa coord. (generalizada)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

momentum angular

en nuestro caso sería $p_\phi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m u^2 v_0^2 \dot{\phi} = \ell = \text{cte.}$ (2)

$\rho^2 = x^2 + y^2 = u^2 v_0^2 \cos^2\phi + u^2 v_0^2 \sin^2\phi = u^2 v_0^2$

Mientras que la ec. de E-L para u nos da:

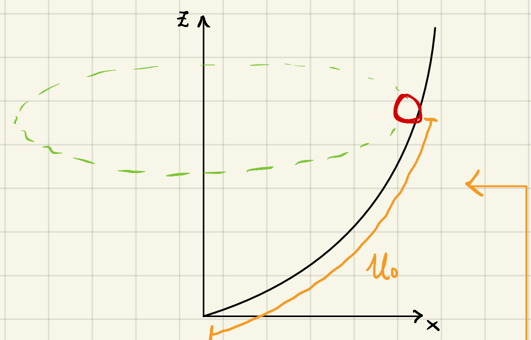
- $\dfrac{\partial L}{\partial u} = m u v_0^2 \dot{\phi}^2 + m u \dot{u}^2 - mgu$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m \dot{u} v_0^2 + m u^2 \dot{u}$

$$\Rightarrow \cancel{m} \ddot{u} v_0^2 + 2\cancel{m} u \dot{u}^2 + \cancel{m} u^2 \ddot{u} = \cancel{m} u v_0^2 \dot{\phi}^2 + \cancel{m} u \dot{u}^2 - \cancel{m} g u$$

despejando $\dot{\phi}$ de (2) y reemplazando en la EoM

$$\Rightarrow \ddot{u} v_0^2 + u^2 \ddot{u} + u \dot{u}^2 = u v_0^2 \frac{\ell^2}{m^2 u^4 v_0^4} - gu$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u}(v_0^2 + u^2) + u\dot{u}^2 - \frac{\ell^2}{m^2 u^3 v_0^2} + gu = 0 \quad (3)$$



con lo que conseguimos la EoM que rige el movimiento de la partícula.

c) Imponer órbitas circulares (estables) es lo mismo que buscar puntos de equilibrios estables, que se encuentran imponiendo

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} \overset{!}{=} 0 \;\wedge\; \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0$, la primera condición implica que $\dot{u}(u_0) = 0$ y la segunda

$$\Rightarrow g u_0 = \frac{\ell^2}{m^2 u_0^3 v_0^2} \Rightarrow \boxed{u_0^4 = \frac{\ell^2}{g m^2 v_0^2}}$$

distancia "parabólica" al punto de las órbitas circulares

y para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones debemos convertir (3) en la EoM de un oscilador armónico $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ que es una EDO lineal. Obviamente no pueden haber pequeñas oscilaciones para cualquier u, sino que solo en torno a los puntos de equilibrio estables (en este caso u_0) entonces consideraremos una pequeña perturbación en torno a u_0 de la forma

$$u(t) = u_0 + \delta u(t), \quad \text{donde } |\delta u(t)| \ll u_0 \;\forall t$$

debemos reemplazar esta expresión en (3) donde como $u_0 = cte \Rightarrow \dot{u} = \delta\dot{u}$ y $\ddot{u} = \delta\ddot{u}$

$$\Rightarrow \delta\ddot{u}\left(v_0^2 + (u_0+\delta u)^2\right) + (u_0+\delta u)\cdot\delta\dot{u}^2 - \frac{l^2}{m^2 v_0^2 (u_0+\delta u)^3} + g(u_0+\delta u) = 0$$

esta expresión debemos mantenerla a primer orden, ya que si δu ya es pequeño, casos como

$$\delta u^2 \, , \; \delta\dot{u}^2 \, , \; \delta u \cdot \delta\dot{u} \, , \; \delta u \cdot \delta\ddot{u} \;<<<<< 1$$

son mucho más pequeñas, por lo que los despreciamos. Notamos entonces que rápidamente podemos despreciar términos y quedar con:

$$\delta\ddot{u}\,(v_0^2 + u_0^2) - \frac{l^2}{m^2 v_0^2 (u+\delta u)^3} + g(u_0 + \delta u) = 0 \quad (4)$$

ahora, también debemos linealizar el término $1/(u_0+\delta u)^3$ usando Taylor

$$\frac{1}{(u_0+\delta u)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(u_0+\delta u)^3}\right]^{(n)}\Bigg|_{\delta u=0} (\cancel{u_0} + \delta u - \cancel{u_0})^n$$

$$= \frac{1}{u_0^3} - 3\frac{1}{(u_0+\delta u)^4}\Bigg|_{\delta u = 0} \cdot \delta u + O(\delta u^2)$$

$$\approx \frac{1}{u_0^3} - \frac{3}{u_0^4}\delta u \, ,$$

reemplazando en (4)

$$\Rightarrow \delta\ddot{u}\,(v_0^2 + u_0^2) - \frac{l^2}{m^2 v_0^2}\left[\frac{1}{u_0^3} - \frac{3}{u_0^4}\delta u\right] + g u_0 + g\delta u = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta\ddot{u} + \frac{1}{v_0^2 + u_0^2}\left[\frac{l^2}{m^2 u_0^4 v_0^2} + g\right]\delta u = C_1$$

donde C_1 es una constante conocida. De esta EoM reconocemos la expresión de un oscilador armónico $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, donde la frecuencia de pequeñas oscilaciones sería

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{v_0^2 + u_0^2}\left[\frac{l^2}{m^2 u_0^4 v_0^2} + g\right]}$$

b) Para encontrar las fuerzas de ligazón/restricción debemos hacer explícitas en el Lagrangeano las relaciones geométricas. En nuestro caso queremos que la partícula no se despegue de la pared, que en coord. parabólicas es que $\forall t \;\; v = v_0$, así que la restricción es

$$f_1 = v - v_0$$

Es importante recordar que cuando ocupamos multiplicadores de Lagrange debemos considerar las 3 coordenadas como variables y después de calcular las ecs. E-L y las derivadas c/r a los λ_i, recién reemplazamos con las restricciones.

Entonces las derivadas de las coord. cartesianas serían

- $\dot{x} = \dot{u}v\cos\phi + u\dot{v}\cos\phi - uv\sin\phi\dot{\phi}$
- $\dot{y} = \dot{u}v\sin\phi + u\dot{v}\sin\phi + uv\cos\phi\dot{\phi}$
- $\dot{z} = u\dot{u} - v\dot{v}$

así que la energía cinética sería:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \ldots = \frac{1}{2}m(u^2\dot{u}^2 + v^2\dot{u}^2 + u^2\dot{v}^2 + v^2\dot{v}^2 + u^2v^2\dot{\phi}^2)$$

y la energía potencial es

$$U(u,v) = mgz = \frac{mg}{2}(u^2 - v^2)$$

así que el Lagrangeano es:

$$L = \frac{1}{2}m(u^2\dot{u}^2 + v^2\dot{u}^2 + u^2\dot{v}^2 + v^2\dot{v}^2 + u^2v^2\dot{\phi}^2) - \frac{mg}{2}(u^2 - v^2)$$

y la restricción $f_1 = v - v_0$ la agregamos en la ec. de E-L como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i}$$

podrían ser más de una restricción

vamos coordenada por coordenada. Para $q_1 = u$:

- $\dfrac{\partial L}{\partial u} = mu\dot{u}^2 + mu\dot{v}^2 + muv^2\dot{\phi}^2 - mgu$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} = mu^2\dot{u} + mv^2\dot{u}$
- $\dfrac{\partial f_1}{\partial u} = 0$ (solo depende de v)

$$\Rightarrow 2mu\dot{u}^2 + mu^2\ddot{u} + 2mv\dot{v}\dot{u} + mv^2\ddot{u} - mu\dot{u}^2 - mu\dot{v}^2 - muv^2\dot{\phi}^2 + mgu = 0 \quad (\mathrm{I})$$

para $q_2 = \phi$:

- $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mu^2v^2\dot{\phi}$
- $\dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} = 0$

$$\Rightarrow 2mu\dot{u}v^2\dot{\phi} + 2mu^2v\dot{v}\dot{\phi} + mu^2v^2\ddot{\phi} = 0 \quad (\mathrm{II})$$

y para $q_3 = v$

- $\dfrac{\partial L}{\partial v} = m v \dot{u}^2 + m v \dot{v}^2 + m u^2 v \dot{\phi}^2 + m g v$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{v}} = m u^2 \dot{v} + m v^2 \dot{v}$
- $\dfrac{\partial f_1}{\partial v} = \lambda_1$

$$\Rightarrow 2mu\dot{u}\dot{v} + mu^2\ddot{v} + 2mv\dot{v}^2 + mv^2\ddot{v} - mv\dot{u}^2 - mv\dot{v}^2 - mu^2v\dot{\phi}^2 - mgv = \lambda_1 \quad (\text{III})$$

Ahora sí usamos que como $v = v_0 \Rightarrow \dot{v} = \ddot{v} = 0$, reemplazamos

$$(\text{I}) \Rightarrow \quad u\dot{u}^2 + u^2\ddot{u} + v_0^2\ddot{u} - uv_0^2\dot{\phi}^2 + gu = 0 \quad (\text{I}.2)$$

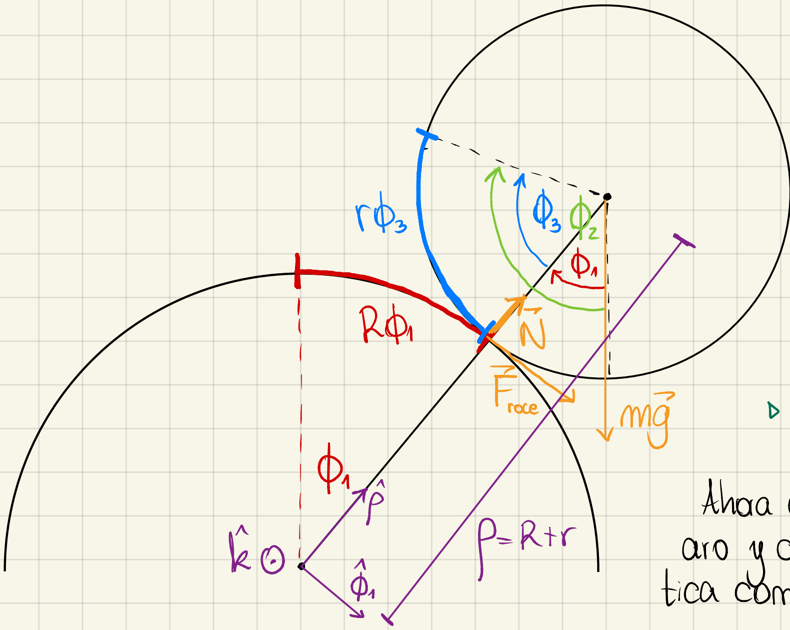
$$(\text{II}) \Rightarrow \quad 2u\dot{u}v_0^2\dot{\phi} + u^2v_0^2\ddot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(u^2v_0^2\dot{\phi}\right) = 0 \Rightarrow p_\phi = mu^2v_0^2\dot{\phi} = l = \text{cte.} \quad (\text{II}.2)$$

$$(\text{III}) \Rightarrow \quad -v_0\dot{u}^2 - u^2v_0\dot{\phi}^2 - mgv_0 = \lambda_1 \quad (\text{III}.2)$$

notamos que con (I.2) y (II.2) recuperamos lo que teníamos antes, solo que ahora obtuvimos el valor de la fuerza de restricción que permite que la partícula no atraviese la pared del paraboloide y que conocemos como la fuerza normal. Reemplazando (II.2) en (III.2)

$$\boxed{N = \lambda_1 = -v_0\dot{u}^2 - \frac{l^2}{m^2u^2v_0^3} - mgv_0}$$

P2



Tenemos dos fuerzas de restricción: la normal que permite que los objetos no se atraviesen y la fuerza de roce estático que permite que se pueda rodar sin resbalar, geométricamente esto es

▹ $\rho = R + r$ (Normal) ▹ $R\phi_1 = r\phi_3$ (Rodar sin resbalar)

así que definimos:

▹ $f_1 = \rho - (R+r)$ ▹ $f_2 = R\phi_1 - r(\phi_2 - \phi_1)$

Ahora expresemos el Lagrangeano. Solo tiene movimiento el aro y como es un sólido rígido expresamos su energía cinética como:

$$K = K_{CM} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{CM} \vec{\Omega}$$

donde $K_{CM} = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{R}}_{CM}|^2$, $\vec{\Omega}$ es el vector velocidad angular del aro y I_{CM} el tensor de inercia medido c/r a su CM. Tenemos en coord. cilíndricas que

podrían agregar $\dot{z}^2$

$$\vec{R}_{CM} = \rho\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}_1\hat{\phi}_1 \Rightarrow K_{CM} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}_1^2)$$

Usando la regla de la mano derecha tenemos que $\vec{\Omega}^t = (0, 0, \dot{\phi}_2)$, por lo que solo nos interesa la componente I_{33CM} que para un aro de masa m y radio r es $I_{33CM} = mr^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{CM}\vec{\Omega} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}_2^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}_1^2) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}_2^2$$

La única contribución a la energía potencial es la potencial gravitatoria

$$U = mgh_{CM} = mg\rho\cos\phi_1$$

así que el Lagrangeano (sin las restricciones) es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}_1^2) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}_2^2 - mg\rho\cos\phi_1$$

y las restricciones las agregamos como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q_i}$$

De aquí simplemente derivan c/r a $q_1 = \rho$, $q_2 = \phi_1$, $q_3 = \phi_2$ con lo que conseguirán 3 EDOs, luego reemplazan considerando $\rho = R + r$ y $R\phi_1 = r(\phi_2 - \phi_1)$ y conseguirán la EoM para ϕ_2 (o ϕ_1, como gusten) y las expresiones $N = \lambda_1$ y $F_{roce} = \lambda_2$ en función del ángulo ϕ_2 (o ϕ_1).