Auxiliar 1

Cinemática y sistemas de coordenadas

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Jou-Jin Ho Ku, Javier Huenupi, Danilo Tapia

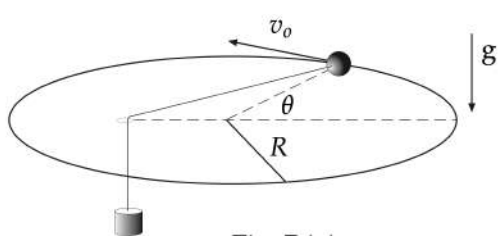
P1.- Coordenadas cartesianas

Una partícula se mueve con rapidez v_0 constante, sobre un riel circular de radio R colocado en posición horizontal sobre una superficie también horizontal. La partícula se encuentra atada mediante una cuerda inextensible a un bloque que cuelga debajo de un agujero localizado a una distancia $R/2$ del centro del riel. Suponga que v_0 es suficientemente pequeño para que la cuerda no se destense.

a) Determina la rapidez del bloque en función del ángulo θ

b) Obtenga la rapidez máxima del bloque

c) Determine la aceleración $\vec{a}$ del bloque cuando la partícula que se mueve sobre el riel pasa por la posición $\theta = 0$



P2.- Coordenadas cilíndricas

Se observa una partícula en movimiento cuya trayectoria está dada por las siguientes funciones:

$$\rho = Ae^{k\theta}, \qquad z = h\rho$$

donde ρ, θ y z son las respectivas coordenadas cilíndricas (con A, k, h positivos). Suponiendo que su rapidez es constante (v_0) y conocida:

a) Calcule la velocidad $\vec{v}$ de la partícula en función de θ, A, k, h y v_0

b) Encuentre su aceleración $\vec{a}$ en función de los mismos parámetros

c) Prueba que $\vec{a} \perp \vec{v}$

d) Encuentre una expresión para $\theta(t)$

Formulario

Coordenadas cartesianas

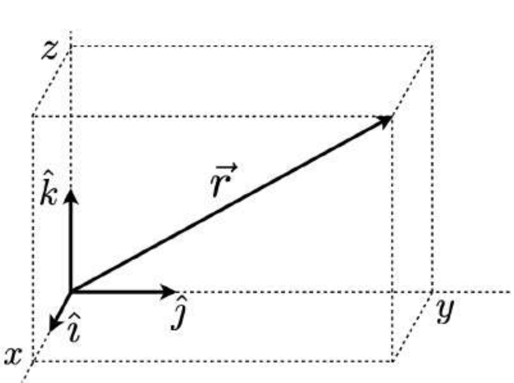
La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cartesianas** están dados por:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}
$$

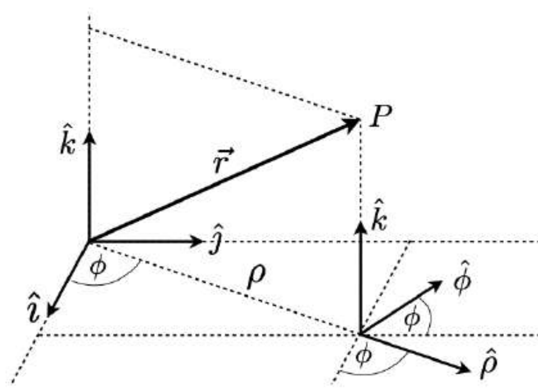
Coordenadas cilíndricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}
$$



(a) Coord. cartesianas



(b) Coord. cilíndricas

Auxiliar 1

P1

a) Para encontrar la velocidad, y con ello la rapidez, de la masa suspendida podemos definir un sist. de coord. cartesiano como el que se encuentra en Fig. 1. De esta forma,

$$\vec{v} = \cancel{\dot{x}}^{=0}\hat{\imath} + \cancel{\dot{y}}^{=0}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

$$= \dot{z}\hat{k} \quad \text{, ya que solo sube y baja.}$$

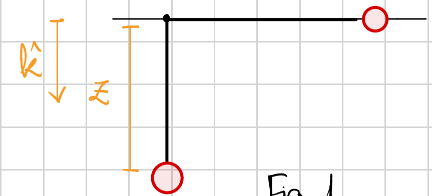


Fig. 1

Y nosotros queremos $v = v(\theta)$, o, que es lo mismo, $\dot{z} = \dot{z}(\theta)$. Para esto tendremos que relacionar el mov. de ambas partículas.

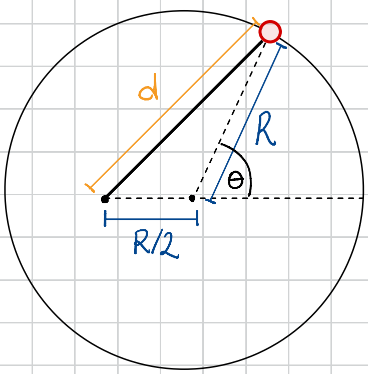


Fig. 2

Por un momento, asumamos que el largo de la cuerda es L, constante al ser inextensible. Por lo tanto, según Fig. 1 y 2, tendríamos

$$L = z(t) + d(t) \quad (1)$$

y d lo podemos encontrar en función de θ usando teo. del coseno

$$d^2 = (R/2)^2 + R^2 - 2(R/2)\,R\cos(\pi - \theta)$$

$$= 5R^2/4 + R^2\cos\theta$$

$$\Rightarrow d(\theta) = R\sqrt{5/4 + \cos\theta} \quad (2)$$

Juntando (1) y (2) obtenemos

$$z = L - d = L - R\sqrt{5/4 + \cos\theta}$$

así que para obtener $\dot{z}$ simplemente derivamos esta expresión

$$\dot{z} = \frac{-R\sin\theta\,\dot{\theta}}{2\sqrt{5/4 + \cos\theta}} \quad (3) \quad \text{(¡desapareció } L\text{!)}$$

donde nos faltaría obtener $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$. La velocidad de la partícula en el aro es

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$$

pero como se mueve en un círculo: $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow |\vec{v}| = R\dot{\theta}$, la rapidez. Además, por enunciado sabemos que se mueve con rapidez v_0 constante, o sea,

$$R\dot{\theta} = v_0 \quad \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$$

Reemplazando en (3)

$$\boxed{|\dot{z}| = \frac{v_0 \sin\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}}} \quad (\star)$$

b) Simplemente derivamos $(\star)$ c/r a θ e igualamos a 0 para obtener el ángulo θ^* donde se da la rapidez máxima (o mínima)

$$\left.\frac{d\,|\dot{z}|}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^*} = \frac{v_0 \cos\theta^*}{\sqrt{5+4\cos\theta^*}} + \frac{4 v_0 \sin^2\theta^*}{2\,(5+4\cos\theta^*)^{3/2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta^*(5+4\cos\theta^*) + 2\sin^2\theta^* \overset{!}{=} 0 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow 5\cos\theta^* + 4\cos^2\theta^* + 2 - 2\cos^2\theta \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\theta^* + 5\cos\theta + 2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta^* = -\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = -\frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \text{ ó } -2$$

Ignorando la solución $\cos\theta^* = 2$ y usando (4)

$$\frac{\sin\theta^*}{\sqrt{5+4\cos\theta^*}} = \sqrt{-\frac{\cos\theta^*}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

por lo que la rapidez máxima sería

$$\boxed{|\dot{z}|_{máx} = \frac{v_0}{2}}$$

c) En este caso $\vec{a} = \ddot{z}\hat{k}$, así que derivemos (3)

$$\ddot{z} = -\frac{v_0 \cos\theta\,\dot{\theta}}{\sqrt{5+4\cos\theta}} - \frac{v_0 \sin^2\theta\,\dot{\theta}}{2(5+4\cos\theta)^{3/2}}$$

$$= -\frac{v_0^2 \cos\theta}{R\sqrt{5+4\cos\theta}} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2R(5+4\cos\theta)^{3/2}}$$

que evaluado en $\theta = 0$ es

$$\ddot{z}(0) = -\frac{v_0^2}{3R} \Rightarrow \boxed{\vec{a}(0) = -\frac{v_0^2}{3R}\hat{k}}$$

P2

a) En coordenadas cilíndricas la velocidad es:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}$$

así que derivamos: $\dot{\rho} = Ake^{k\theta}\dot{\theta}$, $\dot{z} = h\dot{\rho} = Akhe^{k\theta}\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \vec{v} = Ake^{k\theta}\dot{\theta}\hat{\rho} + Ae^{k\theta}\dot{\theta}\hat{\theta} + Akhe^{k\theta}\dot{\theta}\hat{k} \quad (1)$$

Nos piden que $\vec{v}$ no nos quede como función de $\dot{\theta}$, así que ocupamos que la rapidez es v_0 constante. Entonces, tomando la magnitud de (1) e igualando a v_0

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{A^2k^2e^{2k\theta}\dot{\theta}^2 + A^2e^{2k\theta}\dot{\theta}^2 + A^2k^2h^2e^{2k\theta}\dot{\theta}^2}$$

$$= Ae^{k\theta}\dot{\theta}\sqrt{k^2+1+k^2h^2} \overset{!}{=} v_0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0 e^{-k\theta}}{A\sqrt{k^2+1+k^2h^2}} \quad (2)$$

Reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1+k^2h^2}}\left[k\hat{\rho} + \hat{\theta} + kh\hat{k}\right]} \quad (*)$$

b) Para encontrar $\vec{a}$ simplemente hay que derivar $\vec{v}$ c/r a tiempo. Recordemos que $\{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k}\}$ dependen de la posición de la partícula, por lo tanto del tiempo también. En concreto

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \dot{\theta}\hat{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\hat{\theta} = -\dot{\theta}\hat{\rho}, \quad \frac{d}{dt}\hat{k} = \vec{0}$$

Así que, derivando (*),

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1+k^2h^2}}\left[-\dot{\theta}\hat{\rho} + \dot{\theta}k\hat{\theta}\right]$$

$$= \boxed{\frac{v_0^2 e^{-k\theta}}{A(k^2+1+k^2h^2)}\left[-\hat{\rho} + k\hat{\theta}\right]} \quad (\smile)$$

c) Dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son perpendiculares si $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. Hagamos el producto punto

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = \frac{v_0^3 e^{-k\theta}}{A(k^2+1+k^2h^2)^{3/2}}\left[-\hat{\rho}+k\hat{\theta}\right]\cdot\left[k\hat{\rho}+\hat{\theta}+kh\hat{k}\right] \propto \left[-k\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} + k\hat{\theta}\cdot\hat{\theta}\right] = \vec{0} \quad \therefore \vec{a} \perp \vec{v} \ \forall\theta$$

d) Integremos (2) de la siguiente forma

$$e^{k\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sigma_0}{A\sqrt{k^2+1+k^2h^2}} \quad / \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta e^{k\theta}d\theta = \frac{\sigma_0}{A\sqrt{k^2+1+k^2h^2}}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}e^{k\theta}\Big|_0^\theta = \frac{\sigma_0 t}{A\sqrt{k^2+1+k^2h^2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\sigma_0 k t}{A\sqrt{k^2+1+k^2h^2}} - k\right)}$$