

Auxiliar 1

Coordenadas cilíndricas y esféricas

Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi

Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.-

Considere una curva espiral descrita **en coordenadas esféricas** por las ecuaciones:

$$r = R, \quad \phi = N\theta,$$

donde R y N son constantes conocidas (N entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el extremo superior ($\theta = 0$) y manteniendo una velocidad angular cenital constante y conocida, $\dot{\theta} = \omega_0$. Se pide:

- Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleración para una posición arbitraria de la partícula sobre su trayectoria.
- Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Indicación:** De ser difícil de calcular, puede dejar expresada la integral.

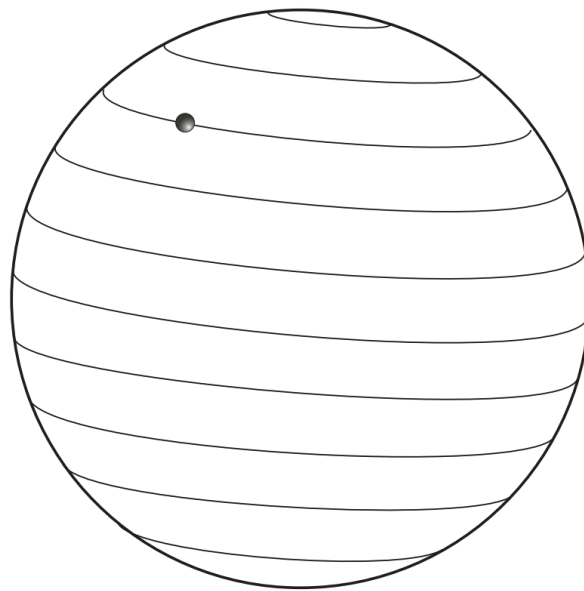


Figura 1: Pregunta 1

P2.- [Propuesto]

Considere una curva espiral cónica descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

$$\theta = \pi/4, \quad \phi = 2\pi \frac{r}{R},$$

donde R es una constante conocida. Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el origen manteniendo una velocidad radial constante y conocida, $\dot{r} = c$. Se pide:

- Determine la distancia radial del punto P en el cual la rapidez de la partícula es $3c$. Esta será la longitud radial máxima de la espira.
- Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Nota:** Está bien si deja su solución en términos de una integral muy complicada.

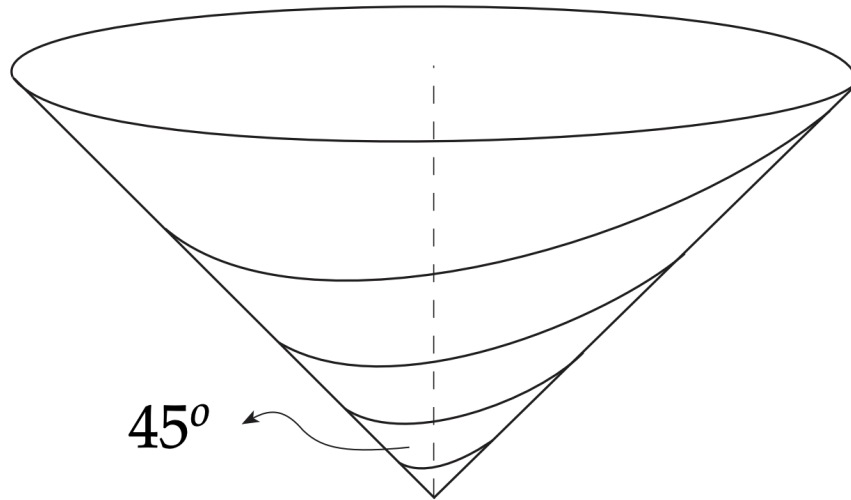


Figura 2: Pregunta 2

P3.- El problema del pescador

Luego de un largo día de trabajo, un pescador se dispone a la peligrosa misión diaria de cruzar un río de ancho D , partiendo desde A e intentando llegar al punto O en la orilla opuesta. El agua del río tiene una velocidad constante \vec{v}_0 en todo su ancho, por lo que el pescador debe remar con una velocidad \vec{v}_p relativa al agua¹ y siempre apuntando a O como se observa en la Figura 3.

- Usando coordenadas polares determine las ecuaciones de $\dot{\theta}$ y \dot{r} en función de r , θ , v_0 y v_p . Con estas ecuaciones exprese $\frac{dr}{d\theta}$ en función de los mismos parámetros.
- Integre la expresión de $a)$ para encontrar la trayectoria en función de θ , D y las velocidades enunciadas, ¿qué condición debe cumplir v_p para que el pescador pueda llegar a O ?

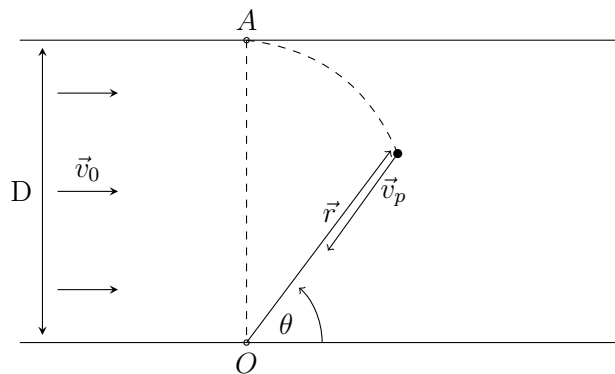


Figura 3: Pregunta 3

¹ Ojo con la diferencia entre la velocidad relativa a la orilla y relativa al agua

Formulario

Coordenadas cilíndricas

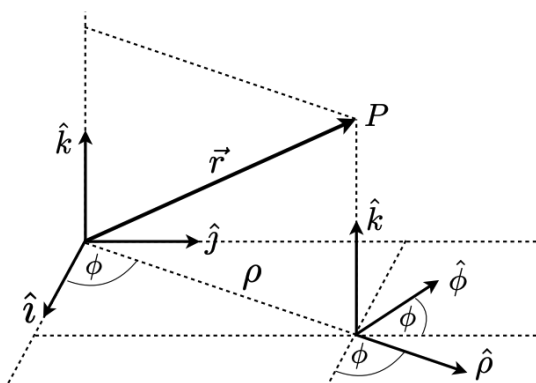
La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho \hat{\rho} + z \hat{k} \\ \vec{v} &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{k} \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{k} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{k}\end{aligned}$$

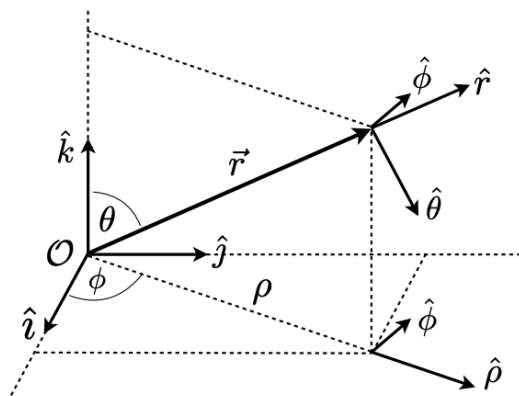
Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas esféricas** están dados por:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \hat{r} \\ \vec{v} &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\phi} \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d(r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta)}{dt} \hat{\phi}\end{aligned}$$



(a) Coord. cilíndricas



(b) Coord. esféricas

Auxiliar 1

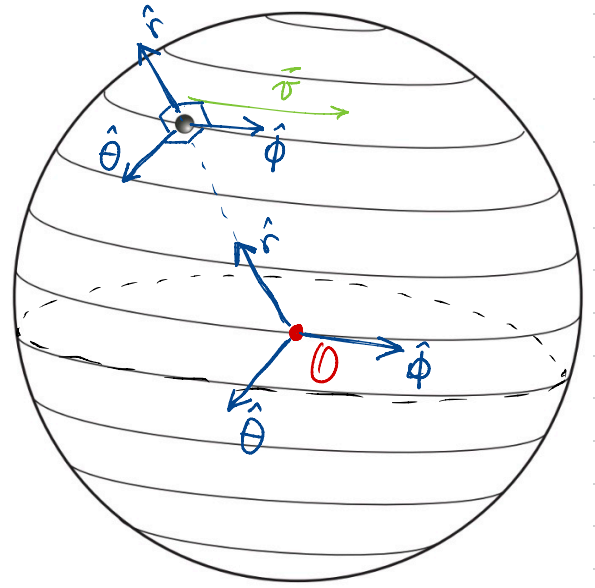
P1

a) Debemos reemplazar en las expresiones en coordenadas esféricas de la velocidad

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

y la aceleración

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} \\ & + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} \\ & + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\phi} \end{aligned}$$



Ojo que nos dicen que quede en función de la posición (no el tiempo), así que dejaremos todo en función de θ (la única variable que dejaremos). Calculamos

- ▶ $r = R \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0 \quad \forall$ toda posición
- ▶ $\phi = N\theta \Rightarrow \dot{\phi} = N\dot{\theta} = N\omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = N\ddot{\theta} = 0$
- ▶ $\dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

reemplazamos

$$\vec{v} = 0 \cdot \hat{r} + R \cdot \omega_0 \hat{\theta} + RN\omega_0 \sin\theta \hat{\phi} = R\omega_0 \hat{\theta} + RN\omega_0 \sin\theta \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (0 - R\omega_0^2 - RN^2\omega_0^2\sin^2\theta)\hat{r} + (0 + 0 - RN^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (0 + 0 + 2RN\omega_0^2\cos\theta)\hat{\phi} \\ = & (-R\omega_0^2 - RN^2\omega_0^2\sin^2\theta)\hat{r} - RN^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta\hat{\theta} + 2RN\omega_0^2\cos\theta\hat{\phi} \end{aligned}$$

b) Sabemos que la partícula comienza a moverse en el "polo norte", $\theta = 0$, y para recorrer toda la espiral debe llegar hasta el extremo opuesto: el "polo sur", que se encuentra en $\theta = \pi$.

Además, sabemos que la partícula desciende con rapidez $\dot{\theta} = \omega_0$ en $\hat{\theta}$, que es una EDO de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega_0 \quad / \int_{t=0}^{t_f} dt \\ \Rightarrow \int_0^{t_f} \frac{d\theta}{dt} dt &= \int_0^{t_f} \omega_0 dt \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\theta(t=0)}^{\theta(t=t_f)} d\theta = \omega_0 \int_0^{t_f} dt$$

donde sabemos que $\theta(t=0) = 0$ y $\theta(t=t_f) = \pi$ y ω_0 es cte.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} d\theta = \omega_0 \int_0^{t_f} dt$$

$$\Leftrightarrow \pi = \omega_0 t_f$$

$$\therefore t_f = \frac{\pi}{\omega_0}$$

y para calcular la longitud de la espira usamos la fórmula de distancia recorrida total

$$d_{tot} = \int_{t_0=0}^{t_f} \|\vec{v}(t)\| dt$$

así que calculamos la magnitud de la vel. que encontramos y aprovechamos que $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ es **ortonormal**

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$$= \sqrt{(v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}) \cdot (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi})}$$

$$= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2}$$

en nuestro caso particular: $\vec{v} = R\omega_0 \hat{\theta} + RN\omega_0 \sin\theta \hat{\phi}$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\omega_0^2 + R^2N^2\omega_0^2 \sin^2\theta(t)}$$

donde sabemos que $\theta(t) = \omega_0 t$

$$\therefore d_{tot} = \int_0^{t_f} \sqrt{R^2\omega_0^2 + R^2N^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)} dt$$

P3

a) Hay que tener bien claro los distintos tipos de velocidades. La superficie del río se mueve con una velocidad homogénea \vec{v}_0 **clr a las orillas** (como las cintas caminadoras del aeropuerto, usadas para recorrerlo más rápido) y el pescador se mueve sobre el río con una velocidad \vec{v}_p **clr al río, no clr a la orilla** (como un pasajero caminando sobre la cinta caminadora).
 Por lo tanto, alguien en la orilla ve al pescador moverse con velocidad

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_p$$

clr a la orilla. Ahora necesitamos las expresiones de estas velocidades en algún sist. de coord. Como el movimiento es curvo y en un solo plano: elegiremos coord. polares (o cilíndricas con $z=0$), centrado en O

Geométricamente encontramos que en este sist.

$$\triangleright \vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{r} - v_0 \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\triangleright \vec{v}_p = -v_p \hat{r}$$

$$\therefore \vec{v} = (v_0 \cos \theta - v_p) \hat{r} - v_0 \sin \theta \hat{\theta} \quad (1)$$

Nosotros sabemos que cualquier velocidad en polares (cilíndricas) se escribe como

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (2)$$

y como cada componente es independiente, identificamos los términos de (1) y (2)

$$\Rightarrow \dot{r} = v_0 \cos \theta - v_p \quad \wedge \quad r \dot{\theta} = -v_0 \sin \theta \quad (3)$$

con lo que obtenemos lo primero que nos piden.

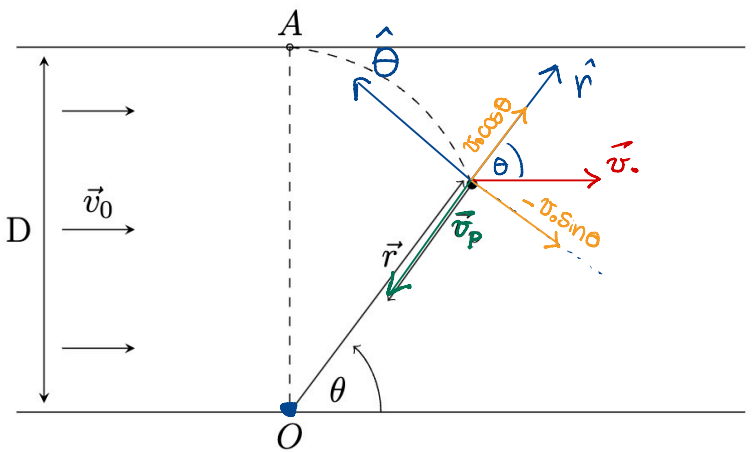
Ahora, necesitamos $dr/d\theta$. Lógicamente la distancia radial, r , depende de la posición angular, θ , así que podemos hacer la siguiente regla de la cadena:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

así que usando (3) $\frac{dr}{d\theta} = -r \frac{(v_0 \cos \theta - v_p)}{v_0 \sin \theta} \quad (4)$

b) Queremos obtener $r=r(\theta)$, así que integramos (4)

$$\frac{dr}{r} = \frac{(v_p - v_0 \cos \theta)}{v_0 \sin \theta} d\theta \quad \int$$



$$\Rightarrow \int_{r_0}^{r(\theta)} \frac{dr}{r} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(v_p - v_c \cos \theta)}{v_c \sin \theta} d\theta$$

donde $r_0 = r(t=0)$ y $\theta_0 = \theta(t=0)$, que por dibujo y enunciado sabemos que

$$r_0 = D \quad \wedge \quad \theta_0 = 0$$

integrarnos

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \frac{v_p}{v_c} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} - \int_0^{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{r}{D}\right) = -\frac{v_p}{2v_c} \ln\left(\frac{\cos \theta + 1}{1 - \cos \theta}\right) - \ln(\sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow r(\theta) = D \left(\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta + 1}\right)^{v_p/2v_c} \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= D \frac{[\tan(\theta/2)]^{v_p/v_c}}{\sin \theta} \quad (5)$$

Para que el pescador llegue a O se necesita que $r=0$ para $\theta=0$ (ver dibujo). Sin embargo, por (5) vemos que $\sin(\theta \rightarrow 0) = 0$ lo que haría que $r \rightarrow \infty$ (se lo lleva la corriente), pero $\tan(\theta/2) \rightarrow 0$ cuando $\theta \rightarrow 0$, así que para que r vaya a 0 , el numerador debe decrecer más rápido que el denominador. Esto lo logramos con

$$v_p/v_c \gg 1 \quad (\text{o sea, muy grande})$$

$$\Leftrightarrow v_p \gg v_c$$

O sea, que la rapidez de remo debe ser mucho más rápida que la rapidez de la corriente, lo que tiene mucho sentido.