Auxiliar 1

Repaso herramientas matemáticas

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

P1.- Resolución de EDOs

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = a$$

con $m,\ k$ y a constantes. Para esto primero demuestre que esta EDO se puede escribir como:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

con ω una constante en función de m y k. Además considere las condiciones iniciales (en $t = 0$) $z(0) = C$ y $\dot{z}(0) = 0$ para resolver esta ecuación de las siguientes formas:

- Usando polinomio característico
- Usando el anstaz $z(t) = De^{\alpha t}$ con D y α constantes por determinar
- Primero demuestre que $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \dot{z}\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}z}$ y luego utilícelo para encontrar una expresión de la velocidad en función de la posición

P2.- Expansión de Taylor

Expanda en serie de Taylor en torno a 0 las siguientes funciones y considere el caso $x << 1$ (x muy pequeño):

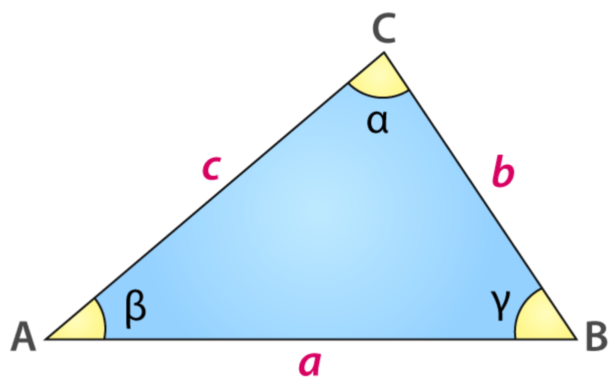
- $f(x) = e^{ax}$
- $g(x) = \sin x$
- $h(x) = \cos x$

Hint: Para considerar $x << 1$ piense en qué relación hay entre las potencias de x

Propuesto: Demuestre la identidad de Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$ usando Taylor

Cosas útiles para el futuro

- Módulo de vectores
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$
- Teorema del seno
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
- Teorema del coseno
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



- Teorema de Pitágoras para descomposición de vectores
- Separación de componentes
- Relación sistemas de coordenadas
- Integrar y derivar como condenade

Auxiliar 1

P1

Tenemos la EDO:
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = a$$

donde nos gustaría que el lado derecho fuese 0, por lo que haremos un cambio de variable de la siguiente forma:

$$m\ddot{x} + kx - a = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx - \frac{k}{k}\cdot a = 0$$

$$m\ddot{x} + k\left(x - \frac{a}{k}\right) = 0$$

Utilizamos el c.v. $z = x - \frac{a}{k}$, donde a y k son ctes. $\Rightarrow \dot{z} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{x}$, reemplazamos

$$\Rightarrow m\ddot{z} + kz = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \underbrace{\omega^2}_{\omega^2 = \frac{k}{m}} z = 0 \quad (1)$$

Solo para que quede más limpio

Ahora si resolvamos.

- Polinomio característico: Es un método de resolución de EDOs para cuando son ctes. los coef. que acompañan a la variable. Se hace de la siguiente forma:

  Reemplazamos los $\ddot{z} \to \lambda^2$, $\dot{z} \to \lambda$ y $z \longrightarrow 1$

  $$(1) \longrightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

  Como $\omega > 0$, $\omega \in \mathbb{R} \Rightarrow \omega^2 > 0 \Rightarrow -\omega^2 < 0$, así que hacemos

  $$\lambda^2 = -1\cdot\omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1\cdot\omega^2} = \pm|\omega|\cdot i = \pm i\omega, \text{ ya que } \omega > 0 \Rightarrow |\omega| = \omega$$

  Por lo tanto tenemos dos soluciones linealmente independientes de la forma

  $$z_1(t) = Ae^{+i\omega t} \quad \text{y} \quad z_2(t) = Be^{-i\omega t}$$

  con A y B constantes que se determinan con condiciones iniciales, finalmente la solución es

  $$z(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

  $$= A\cos\omega t + A\sin\omega t + B\cos\omega t - B\sin\omega t$$

  $$= \tilde{A}\cos\omega t + \tilde{B}\sin\omega t \quad (2)$$

▹ Ansatz: un ansatz es una adivinanza de cómo puede ser la forma de una solución. En este caso tenemos un oscilador armónico, por lo que la solución debe tener una forma cíclica, en particular trigonométrica

$$z_{1,2}(t) \propto e^{i\alpha t} \quad \text{no lo conocemos a priori}$$

Reemplazamos en (1) $\rightarrow -\alpha^2 e^{i\alpha t} + w^2 e^{i\alpha t} = 0 \quad / e^{-i\alpha t}$

$$\Rightarrow -\alpha^2 + w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm w$$

con lo que encontramos la expresión de α (en el ansatz era una incógnita), obteniendo lo mismo que antes.

Ahora ocupemos C.I. en (2)

- $z(t=0) = \tilde{A}\cdot 1 + \tilde{B}\cdot 0 = C \Leftrightarrow \tilde{A} = C$
- $\dot{z}(t=0) = -w\tilde{A}\cdot 0 + w\tilde{B}\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{B} = 0$

así que la solución nos queda $z(t) = C\cos wt \Rightarrow x(t) = C\cos wt + \frac{a}{k}$

▹ Truquito de mecánica: vemos que $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \underbrace{\frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt}}_{\text{regla de la cadena}} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\dot{x}$

Ocupándolo en (1) y jugando con los diferenciales de las derivadas y de las integrales

$$(1) \rightarrow \frac{\dot{z}\,d\dot{z}}{dz} = -w^2 z \quad / \int dz \text{ , o sea, integramos en z}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{z}} \dot{z}\,d\dot{z} = -w^2 \int_c^{z} z\,dz$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{z}^2}{2} = -\frac{w^2}{2}(z^2 - C^2)$$

P2

Recordamos la expansión en serie de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

donde x_0 es el punto en torno al cual queremos aproximar. Ahora queremos aproximar en torno a 0, $x_0 = 0$

- $f(x) = e^{ax} = e^{a x_0} + \frac{1}{1!} a e^{a x_0}(x-x_0)^1 + \frac{1}{2!} a^2 e^{a x_0}(x-x_0)^2 + \dots$

  $= 1 + \frac{a}{1!} x + \frac{a^2}{2!} x^2 + \frac{a^3}{3!} x^3 + \dots$

- $g(x) = \sin(x) = \sin(x_0) + \frac{1}{1!}\cos(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2!}\sin(x_0)(x-x_0)^2 - \frac{1}{3!}\cos(x_0)(x-x_0)^3 + \dots$

  $= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$

- $h(x) = \cos(x) = \cos(x_0) - \frac{1}{1!}\sin(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2!}\cos(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\sin(x_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!}\cos(x_0)(x-x_0)^4 + \dots$

  $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$

Entre más términos consideramos, más "precisa" es la aproximación. Ahora, como $x \ll 1$ entonces los x's con exponentes más grandes son despreciables, por lo que tomando solo el primer término

- $e^{ax} \approx 1$

$$\left.\begin{array}{l} \sin(x) \approx x \\ \cos(x) \approx 1 \end{array}\right\} \text{muy utilizados más adelante}$$