Auxiliar 1

Inicio de una bonita historia

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.- La aceleración de un bloque que se mueve a lo largo del eje x se expresa como:

$$\vec{a} = k\sqrt{x}\ \hat{i}$$

Donde k es una constante positiva. Tanto la rapidez v como el desplazamiento x son nulos para $t = 0$. Determine la aceleración, velocidad y posición del bloque en un instante t cualquiera.

P2.- Una partícula que se desplaza en un medio viscoso a alta velocidad, experimenta una fuerza de freno que es proporcional al cuadrado de la rapidez. Como resultado de lo anterior, la aceleración que experimenta la partícula cuando se mueve en línea recta en ese medio, a lo largo del eje x se expresa como:

$$\vec{a} = -kv^2\hat{i}$$

Donde k es una constante. Suponiendo que para $t = 0$ se tiene que $x = 0$ y $v = v_0$, determine:

1. Rapidez de la partícula en función de la posición x
2. Rapidez de la partícula en función del tiempo

P3.- Una partícula se mueve con rapidez constante v_0 a lo largo de una trayectoria parabólica definida por la ecuación $y = cx^2$, donde c es una constante positiva. Encuentre expresiones para la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ (*propuesto*) cuando la partícula se encuentra en la posición $(x_0,\ y_0 = c{x_0}^2)$.

Auxiliar 1

P1

Tenemos la aceleración $\vec{a} = k\sqrt{x}\,\hat{\imath}$, por lo que en su forma escalar es:

trucazo mecánico!

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = k\sqrt{x} \Big/ \int dx \Rightarrow \int \dot{x}\,d\dot{x} = k\int \sqrt{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{2k}{3}x^{3/2} + c$$

Tenemos las condiciones iniciales en $t=0$, $\dot{x}(t=0) = x(t=0) = 0$, o sea

$$0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$$

seguimos

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{2}{3}k\,x^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}k\,x^{3/2}} \Big/ \int dt$$

$$\pm\left(\frac{4}{3}k\right)^{-1/2}\int x^{-3/4}dx = dt$$

$$\pm 4\cdot\left(\frac{3}{4k}\right)^{1/2} x^{1/4} = t + c$$

C.I. $\rightarrow x(t=0)=0 \Rightarrow c=0$

$$\Rightarrow \pm 2\left(\frac{3}{k}\right)^{1/2} x^{1/4} = t$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\pm\frac{t}{2}\left(\frac{k}{3}\right)^{1/2}\right)^4$$

$$= \frac{t^4}{16}\frac{k^2}{9}$$

Así que para la velocidad $\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{t^3}{4}\frac{k^2}{9}$, y la aceleración $\Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{t^2}{4}\frac{k^2}{3}$

P2

Tenemos un problema similar al anterior

$$\vec{a} = -k v^2 \hat{i} \Rightarrow \ddot{x} = -k \dot{x}^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x}^2 \quad / \int dt$$

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -k \int dt$$

$$-\frac{1}{\dot{x}} = -kt + C_1$$

Nuestras C.I. son $\dot{x}(t=0) = v_0 \Rightarrow -\frac{1}{v_0} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{\dot{x}} = kt + \frac{1}{v_0} \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{1}{kt + 1/v_0} \quad / \int dt$

$$\Rightarrow \int dx = \int \frac{1}{kt + 1/v_0} dt$$

$$x = \frac{\ln(kt + 1/v_0)}{k} + C_2$$

Usamos la condición $x(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\ln(1/v_0)}{k} + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{\ln(1/v_0)}{k}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\ln(kt + 1/v_0)}{k} - \frac{\ln(1/v_0)}{k} = \frac{1}{k}\ln(v_0 k t + 1)$$

Siempre podemos comprobar que soluciona

$$\triangleright\ \ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{k}{(kt + 1/v_0)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{(kt + 1/v_0)^2} = -k\left(\frac{1}{kt + 1/v_0}\right)^2 \quad \checkmark \text{ Soluciona!}$$

Para encontrar la velocidad en función de la posición se puede trucazo de mecánica.
Empecemos de la ec. dada

$$\ddot{x} = -k\dot{x}^2 \Leftrightarrow \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -k\dot{x}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\dot{x}} d\dot{x} = -k dx \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k \int dx$$

$$\ln(\dot{x}) = -kx + C_3$$

Nuestras C.I.'s son que en $t=0$, $\dot{x}(t=0) = v_0 \wedge x(t_0) = 0$

$$\Rightarrow \ln(v_0) = C_3 \Rightarrow \ln(\dot{x}) = -kx + \ln(v_0) \Rightarrow \dot{x}(x) = \exp(-kx + \ln(v_0))$$

P3

Nos hablan de rapidez (módulo de la velocidad)

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (1)$$

y tenemos la relación entre las posiciones en los dos ejes $y = cx^2$, derivamos esta

$$\Rightarrow \dot{y} = 2cx\dot{x}, \text{ reemplazamos } x \text{ con}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = 2c\left(\pm\sqrt{\frac{y}{c}}\right)\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = \frac{\dot{y}}{2c}\left(\pm\sqrt{\frac{c}{y}}\right), \text{ reemplazamos en (1)}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{\dot{y}^2}{4c^2}\frac{c}{y} + \dot{y}^2$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2\left(\frac{1}{4cy} + 1\right) = v_0^2$$

$$\Rightarrow \dot{y}(y) = \pm v_0\sqrt{\frac{4cy}{1+4cy}} = \pm v_0\sqrt{\frac{4c^2x^2}{1+4c^2x^2}} = \dot{y}(x)$$

Reemplazamos en (1) $\Rightarrow v_0^2 = \dot{x}^2 + v_0^2\left(\frac{4c^2x^2}{1+4c^2x^2}\right) \Leftrightarrow \dot{x}(x) = \pm v_0\sqrt{1 - \frac{4c^2x^2}{1+4c^2x^2}}$

$$\Rightarrow \vec{v}(x=x_0, y=y_0) = \left(\pm v_0\sqrt{1-\frac{4c^2x^2}{1+4c^2x^2}}, \pm v_0\sqrt{\frac{4c^2x_0^2}{1+4c^2x_0^2}}\right)$$