Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 19

Órbitas y SRNI

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

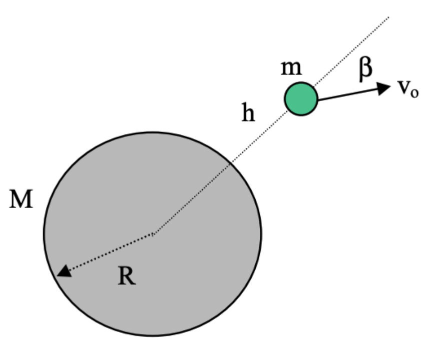
P1.-

Se coloca en órbita un satélite de modo que a una altura h sobre la superficie terrestre se le deja libre con una velocidad v_0 en una dirección que forma un ángulo β con el vector de posición definido desde el centro de la Tierra. Encuentre la ecuación de la trayectoria $\rho(\theta)$ en términos de los parámetros del problema, y también en función del radio de la Tierra R, de la constante gravitacional G y de la masa de la tierra M.

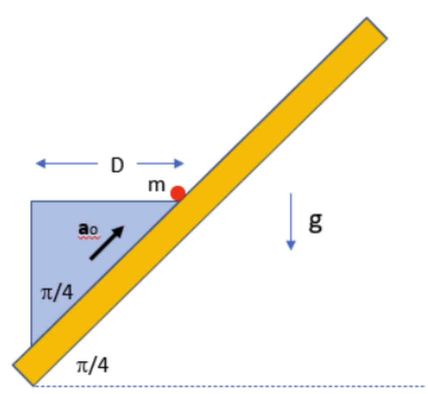
P2.- [P. Aceituno Ejercicio 3 2021-2]

Una cuña de lado D y ángulo $\alpha = \pi/4$ es forzada a moverse a partir del reposo, con una aceleración constante a_0 a lo largo de una rampa inclinada en un ángulo $\pi/4$ con respecto a la horizontal. Como resultado del movimiento de la rampa una partícula de masa m que se encuentra en reposo en el extremo derecho de la superficie horizontal se pone en movimiento relativo respecto de la rampa.

Determine el tiempo que tarda la partícula en llegar al extremo izquierdo de la superficie horizontal de la rampa.



(a) P1



(b) P2

Formulario

Órbitas planetarias

Para un caso general podemos escribir el radio de la órbita (para cualquier fuerza) como

$$r(\phi) = \frac{\tilde{R}}{1 + e\cos\phi}$$

donde para **planetas** tenemos

$$\tilde{R} = \frac{l^2}{GMm^2}, \qquad e^2 = 1 + \frac{2El^2}{(GM)^2m^3},$$

por lo que tenemos que las órbitas siguen

- Circunferencias: $e = 0 \Rightarrow E = -\frac{(GM)^2m^3}{2l^2}$
- Elipses: $e^2 < 1 \Rightarrow E < 0$
- Parábolas: $e^2 = 1 \Rightarrow E = 0$
- Hipérbolas: $e^2 > 1 \Rightarrow E > 0$

Sistemas de referencia no inerciales

Un sistema S' se conoce como no inercial (SRNI) si se mueve de forma acelerada con respecto a un sistema de referencial inercial S (este puede estar quieto o moviéndose con velocidad constante).

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

$$m\vec{a}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula; $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S'; $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes de S' c/r a los de S y $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.

Usamos esto cuando el movimiento es más fácil de describir desde un SRNI, en vez de un SRI como lo hemos estado haciendo hasta ahora.

Auxiliar 19

P1

[Como NO resolver este problema]

Inocentemente vamos directamente cual caballo 🐎 a integrar la ecuación de movimiento ó la energía

$$m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta}\right)=-\frac{GmM}{\rho^2}\hat{\rho}$$

$\hat{\rho})$ $\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2=-\dfrac{GM}{\rho^2}$

$\hat{\theta})$ $m\rho^2\dot{\theta}=\ell$, constante

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2=\frac{\ell^2}{m^2\rho^4}$$

$$\Rightarrow \hat{\rho})\quad \ddot{\rho}-\frac{\ell^2}{m^2\rho^3}=-\frac{GM}{\rho^2}\quad \Big/\int d\rho$$

$$\int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}}\dot{\rho}\,d\dot{\rho}=\frac{\ell^2}{m^2}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^3}-GM\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2}=-\frac{\ell^2}{2m^2}\frac{1}{\rho^2}+GM\frac{1}{\rho}+c$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt}=\sqrt{-\frac{\ell^2}{m^2}\frac{1}{\rho^2}+2GM\frac{1}{\rho}+2c}\quad \Big/\int dt$$

$$\Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{2c\rho^2+2GM\rho-\ell^2/m^2}}=\int_0^t dt$$

Pero esta integral no es nada bonita...

```
Integrate[x / Sqrt[2 * γ * x ^ 2 + 2 * β * x - α], x]
```

$$\frac{2\sqrt{\gamma}\,(-\alpha+2x(\beta+x\gamma))-\beta\sqrt{-2\alpha+4x(\beta+x\gamma)}\,\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{\beta+2x\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma}\sqrt{-\alpha+2x(\beta+x\gamma)}}\right]}{4\gamma^{3/2}\sqrt{-\alpha+2x(\beta+x\gamma)}}=t+C_3$$

A esto le sumamos que nos piden $\rho(\theta)$, así que faltaría calcular $\theta=\theta(t)$ con

$$\dot{\theta}=\frac{\ell}{m\rho^2(t)}\quad \Big/\int dt$$

$$\Rightarrow \theta(t)=\frac{\ell}{m}\int\frac{dt}{\rho^2(t)}+C_2$$

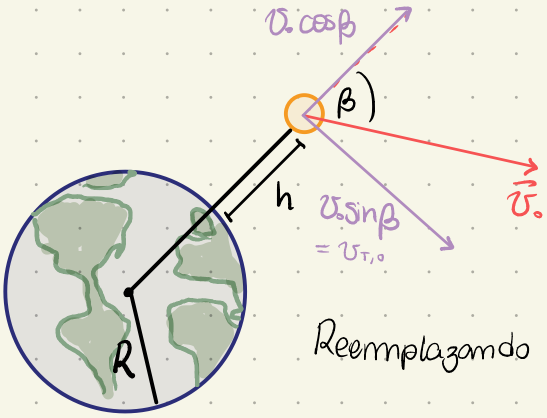
así que por ahí no va...

[Como sí resolverlo]

A partir de la ec. de Binet podemos obtener la expresión

$$r(\theta) = \frac{\tilde{R}}{1 + e\cos\theta}$$

así que solo necesitaríamos calcular $\tilde{R}$ y e con sus fórmulas respectivas, para esto necesitamos calcular la energía mecánica (que se conserva) y el mumentum angular (")



$$\triangleright\; E = E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM}{R+h}$$

$$\triangleright\; \ell = m\rho_0^2\dot{\theta}_0 = m\rho_0 v_{T,0}$$

$$= m(R+h)\, v_0\sin\beta$$

Reemplazando

$$\triangleright\; \tilde{R} = \frac{\cancel{m^2}(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta}{GM\cancel{m^2}} = \frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta}{GM}$$

$$\triangleright\; e^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 - \frac{G\cancel{m}M}{R+h}\right)\frac{\cancel{m^2}(R+h)^2 v_0^2\sin^2\beta}{(GM)^2\cancel{m^3}}$$

$$= 1 + \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R+h}\right)\frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta}{(GM)^2}$$

Así que la trayectoria (el radio parametrizado por el ángulo) es

$$r(\theta) = \frac{(R+h)^2 v_0^2 \sin^2\beta / GM}{1 + \left[\sqrt{1 + \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R+h}\right)\frac{(R+h)^2 v_0^2\sin^2\beta}{(GM)^2}}\;\right]\cos\theta}$$

Algunos ejemplos de órbitas

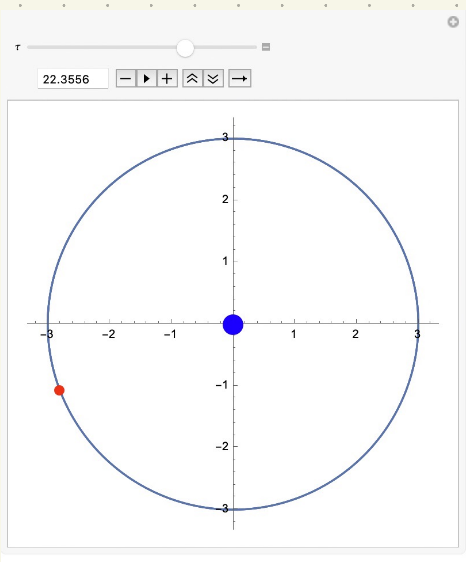


Fig 1: $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ y $\beta = \pi/2$

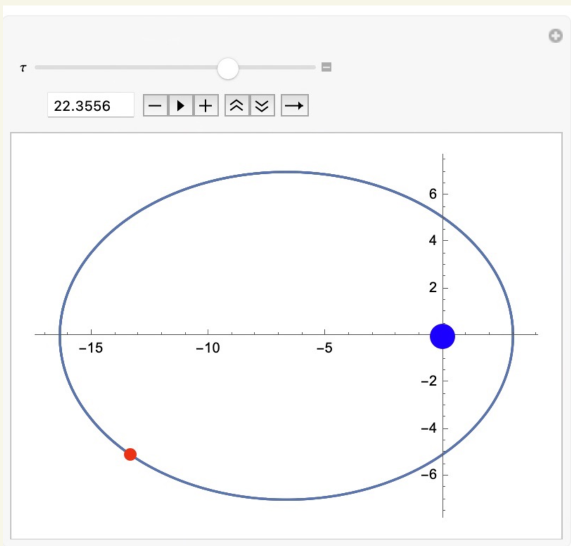


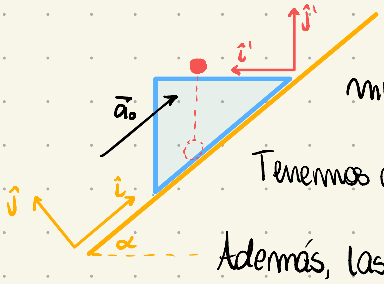
Fig 2: $v_0 = 1{,}3\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ y $\beta = \pi/2$

Código

https://github.com/Wenupi/FI2001-2022-2

P2

Definimos el SRNI con origen en el extremo superior derecho de la cuña (donde comienza la bolita) que se mueve de forma acelerada c/r a la rampa, que es un SRI al estar quieto. Definimos el origen del SRI en la parte inferior de la rampa, con el eje $\hat{\imath}$ paralelo a la rampa



Como los sist's siempre está alineados, no rotan c/r a ellos $\vec{\Omega}=0$, lo que simplifica mucho la expresión

$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} \quad (1)$$

Tenemos que $\ddot{\vec{R}} = a_0\hat{\imath}$ que debemos describir en el SRNI

$$\ddot{\vec{R}} = a_0\left(-\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{j}\right)$$

Además, las fuerzas reales actuando sobre la masa, son: la gravedad y la normal de la cuña

$$\Rightarrow m\vec{a} = -mg\hat{j}' + N\hat{j}'$$

Así que (1) nos queda como

$$m\left(\ddot{x}'\hat{\imath}' + \ddot{y}'\hat{j}'\right) = -mg\hat{j} + N\hat{j} - ma_0\left(-\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{j}'\right)$$

y las ecs. escalares

$$\hat{\imath}')\ m\ddot{x}' = ma_0\cos\alpha$$

$$\hat{j}')\ m\ddot{y}' = -mg\hat{j}' + N\hat{j} - ma_0\sin\alpha\,\hat{j}'$$

Solo nos interesa $\hat{\imath}')$, ya que queremos saber cuándo llega al borde (mov. horizonta), así que trabajamos esta expresión

$$m\int_{\dot{x}_0'}^{\dot{x}'} d\dot{x}' = ma_0\cos\alpha\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow m\dot{x}' = ma_0\cos\alpha\, t$$

$$\Rightarrow m\int_{x_0'}^{x'} dx' = ma_0\cos\alpha\int_0^t t\,dt$$

$$\Leftrightarrow m\,x'(t) = ma_0\cos\alpha\,\frac{t^2}{2}$$

donde consideramos que parte en el origen del SRNI (es arbitrario) y parte con velocidad nula.

Así que veamos cuándo $x'(t^*) = D$

$$\Rightarrow mD = ma_0\cos(\pi/4)\,\frac{t^{*2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^{*2} = \frac{2D}{a_0\cos\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}D}{a_0} \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}D}{a_0}}$$