Auxiliar 19

SRNI y mecánica lagrangiana

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

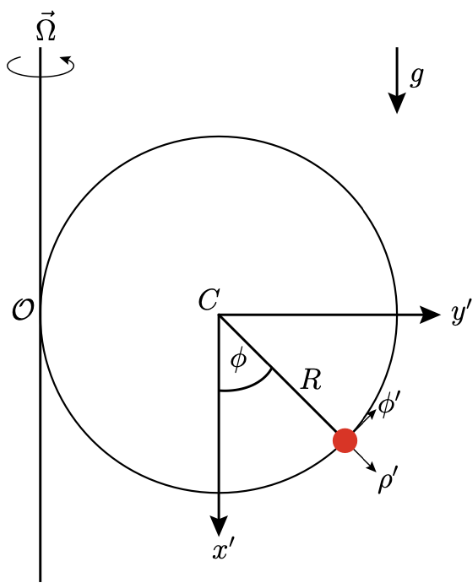
P1.-

Un aro de radio R, gira en torno a un eje vertical tangente al aro en el punto O con velocidad angular Ω constante. Una partícula P de masa m puede moverse a lo largo del aro sin roce alguno. Se define un sistema de referencia no inercial S' centrado en el centro C del aro y con ejes x' y y' en el plano del aro como indica la figura.

(a) Escriba la ecuación de movimiento de P y su proyección a la dirección $\hat{\phi}'$ en la forma $mR\ddot{\phi} = f$

(b) Obtenga la energía potencial U que se calcula como $f = -\frac{1}{R}\frac{dU}{d\phi}$

(c) Suponiendo que $R\Omega^2 << g$ y que el punto de equilibrio es cercano a cero, determine de forma aproximada este ángulo

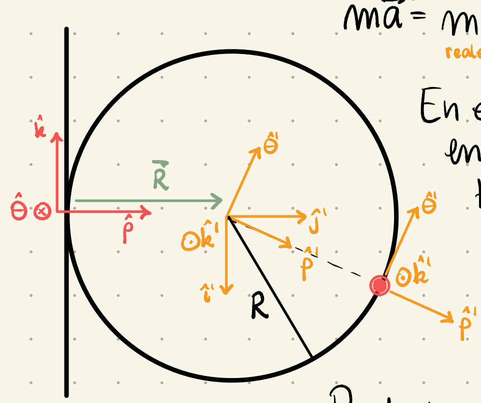


Auxiliar 19

P1

Recordamos nuestra fórmula maestra

$$m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}}$$



En este caso definimos "2" SRNI (nuestro aro), ya que la masa se mueve en un círculo (el aro), por lo que conviene usar coord. polares $(\hat{\rho}', \hat{\theta}', \hat{k}')$, pero también definimos el sist. de coord. cartesianas $(\hat{\imath}', \hat{j}', \hat{k}')$, para poder descomponer $(\hat{\rho}', \hat{\theta}', \hat{k}')$ en este sist. y luego encontrar una relación con el sist. $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k})$ que es de utilidad, ya que el SRNI se mueve en un círculo alrededor de la vara (nuestro SRNI)

Por lo tanto, tenemos que la posición del SRNI c/r al SRI, $\vec{R}$, es

$$\vec{R} = R\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = R\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\cancel{\ddot{\theta}}\hat{\theta}, \text{ ya que } \dot{\theta} = \Omega \text{ constante}$$

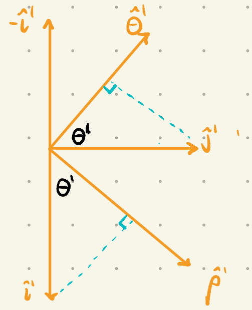
$$\Rightarrow \ddot{\vec{R}} = -R\Omega^2\hat{\rho} \quad (1)$$

Ahora describamos la posición de la partícula en el SRNI

$$\vec{r}' = R\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = R\dot{\theta}'\hat{\theta}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = -R\dot{\theta}'^2\hat{\rho}' + R\ddot{\theta}'\hat{\theta}' \quad (2)$$

Pasemos de $(\hat{\imath}', \hat{j}', \hat{k}')$ a $(\hat{\rho}', \hat{\theta}', \hat{k}')$, por dibujo tenemos las descomposiciones

$$\hat{\imath}' = \cos\theta'\hat{\rho}' - \sin\theta'\hat{\theta}' \quad ; \quad \hat{j}' = \sin\theta'\hat{\rho}' + \cos\theta'\hat{\theta}' \quad ; \quad \hat{k}' = \hat{k}'$$



Reemplazamos en (2) y calculamos las fuerzas ficticias donde $\vec{\Omega} = -\Omega\hat{\imath}'$

▷ $-m\ddot{\vec{R}} = mR\Omega^2\hat{\rho} = mR\Omega^2\hat{j}' = mR\Omega^2(\sin\theta'\hat{\rho}' + \cos\theta'\hat{\theta}')$

▷ $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = m\Omega\hat{\imath}'\times(-\Omega\hat{\imath}'\times R\hat{\rho}')$

$$= -m\Omega^2R(\cos\theta'\hat{\rho}' - \sin\theta'\hat{\theta}')\times((\cancel{\cos\theta'\hat{\rho}'} - \sin\theta'\hat{\theta}')\times\hat{\rho}')$$

$$= -m\Omega^2R\sin\theta'(\cos\theta'\hat{\rho}' - \sin\theta'\hat{\theta}')\times\hat{k}'$$

$$= m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta'\hat{\theta}' + m\Omega^2R\sin^2\theta'\hat{\rho}'$$

▷ $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\Omega(\cos\theta'\hat{\rho}' - \sin\cancel{\theta'}\hat{\theta}')\times R\dot{\theta}'\hat{\theta}'$

$$= 2m\Omega\cos\theta' R\dot{\theta}'\hat{k}'$$

▷ $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = 0$ (Ω es constante)

Ahora describamos las fuerzas reales, que son: el peso en $\hat{\imath}'$ y las normales ejercidas por el aro en $\hat{\rho}'$ y $\hat{k}'$

$$\Rightarrow m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = mg\hat{\imath}' + N_\rho\hat{\rho}' + N_z\hat{k}', \text{ describimos en } (\hat{\rho}', \hat{\theta}', \hat{k}')$$

$$= mg(\cos\theta'\hat{\rho}' - \sin\theta'\hat{\theta}') + N_\rho\hat{\rho}' + N_z\hat{k}'$$

Juntamos todo

$$m(-R\dot{\theta}'^2\hat{\rho}' + R\ddot{\theta}'\hat{\theta}') = mg(\cos\theta'\hat{\rho}' - \sin\theta'\hat{\theta}') + N_\rho\hat{\rho}' + N_z\hat{k}' + mR\Omega^2(\sin\theta'\hat{\rho}' + \cos\theta'\hat{\theta}')$$
$$+ m\Omega^2R\sin\theta'\cos\theta'\hat{\theta}' + m\Omega^2R\sin^2\theta'\hat{\rho}' + 2m\Omega\cos\theta' R\dot{\theta}'\hat{k}'$$

y la proyección en $\hat{\theta}'$ es hacer el producto punto de esta última ecuación con $\hat{\theta}'$, que es lo mismo que escoger la ec. escalar en $\hat{\theta}'$

$\hat{\theta}'$) $mR\ddot{\theta}' = -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2 R\sin\theta'\cos\theta'$, donde identificamos f

$$f(\theta') = -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2 R\sin\theta'\cos\theta'$$

b) Calculamos la energía potencial como dice el enunciado

$$f = -\frac{1}{R}\frac{dU}{d\theta'} \iff -\frac{1}{R}\frac{dU}{d\theta'} = -mg\sin\theta' + mR\Omega^2\cos\theta' + m\Omega^2 R\sin\theta'\cos\theta' \qquad \Big/ \cdot R\int d\theta'$$

$$\Rightarrow -\int^{U} dU = -mgR\int^{\theta'}\sin\theta' d\theta' + mR^2\Omega^2\int^{\theta'}\cos\theta' d\theta' + m\Omega^2R^2\int^{\theta'}\sin\theta'\cos\theta' d\theta'$$

$$\iff U(\theta') = -mgR\cos\theta' - mR^2\Omega^2\sin\theta' - mR^2\Omega^2\frac{\sin^2\theta'}{2} + C$$

donde C es la suma de las constantes de integración y podemos definir como 0

c) Sabemos que el punto de equilibrio se tiene para $dU/d\theta' = 0$,

$$\left.\frac{dU}{d\theta'}\right|_{\theta'=\theta^*} = mgR\sin\theta^* - mR^2\Omega^2\cos\theta^* - mR^2\Omega^2\sin\theta^*\cos\theta^* \overset{!}{=} 0$$

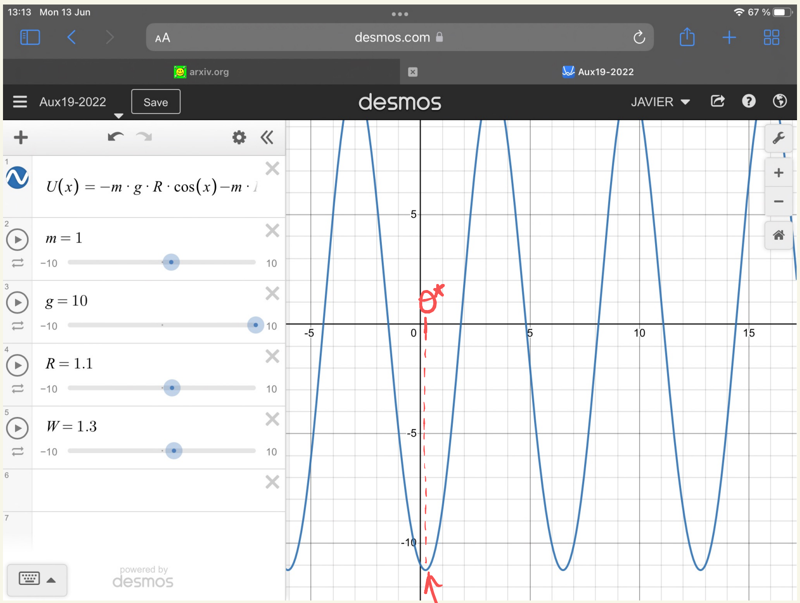
Donde resulta difícil despejar θ^*, pero tenemos por enunciado que $\theta^* \approx 0$, por lo que podemos aproximar $\sin\theta^* \approx \theta^*$ $\wedge$ $\cos\theta^* \approx 1$

$$\Rightarrow mgR\theta^* - mR^2\Omega^2 - mR^2\Omega^2\theta^* = 0$$

$$\iff \theta^* = \frac{\cancel{m}R^{\cancel{2}}\Omega^2}{\cancel{m}g\cancel{R} - \cancel{m}R^2\Omega^2} = \frac{R\Omega^2}{g - R\Omega^2}$$

además nos dicen que $R\Omega^2 << g$ por lo que nos queda

$$\theta^* \approx \frac{R\Omega^2}{g} \approx 0$$

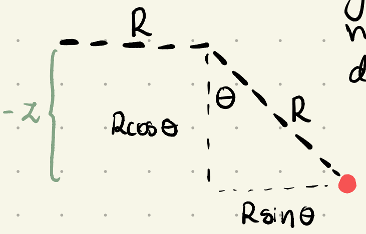


$\theta^* \approx 0$

En este plot vemos el potencial $U(\theta')$ con la condición de que $R\Omega^2 << g$, lo que provoca que uno de los mínimos (punto de equilibrio estable) sea cercano a 0, por lo que se puede hacer la aproximación de los senos y cosenos

Mecánica lagrangiana

Vista de lado



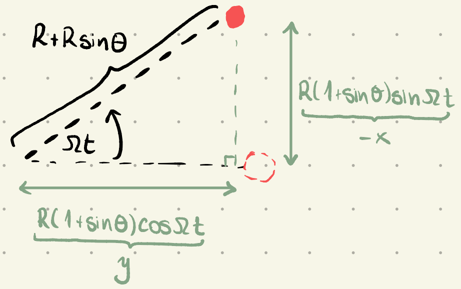
El lagrangiano se define como $L = T - V$, donde usaremos la velocidad en cartesianos y la energía potencial es la gravitacional, que definimos 0 en el centro del aro

$$x(t) = -R(1+\sin\theta)\sin\Omega t \;;\; y(t) = R(1+\sin\theta)\cos\Omega t \;;\; z(t) = -R\cos\theta$$

Primero definimos la posición con respecto a las variables del problema y luego la derivamos para encontrar la velocidad

derivamos
$$\begin{cases} \dot{x} = -R\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\Omega t - R(1+\sin\theta)\Omega\cos\Omega t \\ \dot{y} = R\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\Omega t - R(1+\sin\theta)\Omega\sin\Omega t \\ \dot{z} = R\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

Vista de arriba



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\Big((-R\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\Omega t - R(1+\sin\theta)\Omega\cos\Omega t)^2 + (R\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\Omega t - R(1+\sin\theta)\Omega\sin\Omega t)^2 + R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2}m\Big(R^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\sin^2\Omega t + \cancel{2R^2\cos\theta\,\dot{\theta}(1+\sin\theta)\Omega\sin\Omega t\cos\Omega t} + R^2(1+\sin\theta)^2\Omega^2\cos^2\Omega t$$
$$+ R^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\cos^2\Omega t - \cancel{2R^2\cos\theta\,\dot{\theta}(1+\sin\theta)\Omega\sin\Omega t\cos\Omega t} + R^2(1+\sin\theta)^2\Omega^2\sin^2\Omega t$$
$$+ R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(R^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + R^2(1+\sin\theta)^2\Omega^2 + R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2(1+\sin\theta)^2\Omega^2\right)$$

y la energía potencial sería $V = mgz = -mgR\cos\theta$. Con lo que el lagrangiano nos queda

$$L = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2(1+\sin\theta)^2\Omega^2\right) + mgR\cos\theta$$

Y las ecuaciones de movimiento se calculan con la ec. de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \qquad \left(\text{en verdad es con coordenadas generalizadas } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)$$

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\Omega^2(1+\sin\theta)\cos\theta - mgR\sin\theta$

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR^2\ddot{\theta}$

Así que la ecuación de Euler-Lagrange nos queda

$$mR^2\ddot{\theta} = mR^2\Omega^2\cos\theta + mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + mR\Omega^2\cos\theta + mR\Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

Que si somos observadores, encontramos la misma ecuación de la proyección en $\hat{\theta}'$, solo que sin ver nada de SRNI...