Auxiliar 18

Lagrangiano

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi, Claudia San Martín

P1.- P2 Control 3 2023

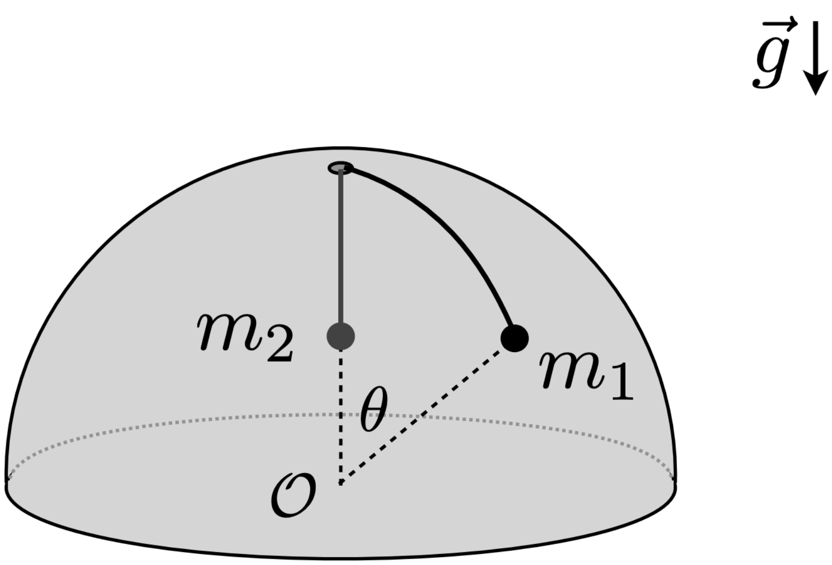
Un casquete semi-esférico de radio R tiene un orificio pequeño en su parte superior. Por él, pasa una cuerda ideal inextensible de largo $\pi R/2$ con dos masas m_1 y m_2 en sus extremos. La masa m_2 cuelga verticalmente desde el orificio, mientras que m_1 permanece en contacto con la superficie del casquete (ver figura). Inicialmente, la masa sobre el casquete es tal que $\theta = \pi/3$, $\dot{\theta} = 0$, $\phi = 0$, $\dot{\phi} = \omega_0$

a) Obtenga una expresión para el Lagrangiano del sistema en función de las coordenadas esféricas θ y φ que denotan la posición de m_1 sobre el casquete

b) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a θ y φ

c) A partir de la ecuación de Euler-Lagrange asociada a φ, determine una expresión para $\dot{\varphi}$ en función de θ tomando en cuenta las condiciones iniciales del sistema

d) Use el resultado de la parte c) para eliminar $\dot{\varphi}$ de la ecuación de Euler-Lagrange asociada a θ. A partir de este resultado, determine el valor que debe tener ω_0 para que la trayectoria alrededor del casquete sea circular uniforme (con $\theta = \pi/3$)



Formulario

Lagrangiano

El lagrangiano L se calcula como

$$L = K - U,$$

donde K es la energía cinética y U la energía potencial del sistema. Se debe considerar **todas** las partículas del sistema y la energía potencial puede tener múltiples contribuciones.
Las ecuaciones de Euler-Lagrange se calculan como

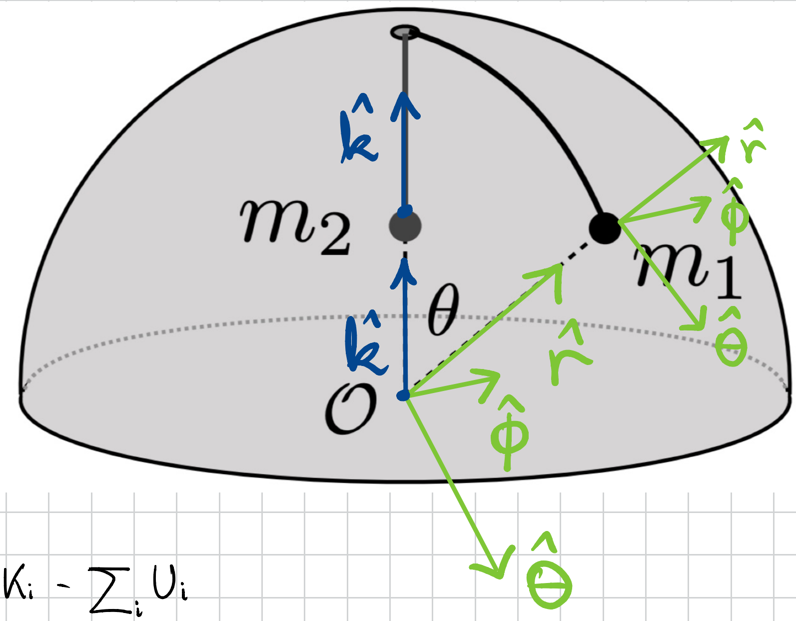
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

donde q es una coordenada generalizada, puede ser: $q = x$, $q = \theta$, $q = r$, etc. Estas ecuaciones de E-L nos dan las ecuaciones de movimiento del sistema.

Auxiliar 18

P1

a) Nos piden encontrar el Lagrangiano del sistema, que consiste en 2 partículas de masa m_1 y m_2, y que se mueven como se muestra en la figura.



Al igual que en el resto del curso, debemos elegir un sist. de coordenadas (o más de uno) t.q. sea "fácil" describir el mov. de las partículas.

Debido a que el Lagrangiano

$$L = K - U = \sum_i K_i - \sum_i U_i$$

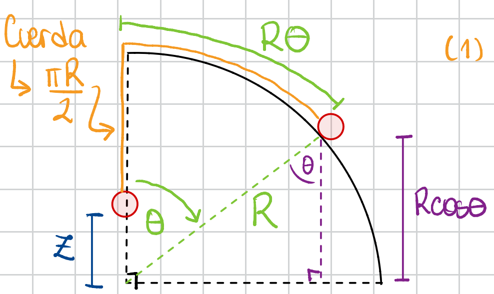
es una cantidad escalar (al igual que la energía mecánica), es más fácil de trabajar, ya lo verán.

En particular, en este caso trabajaremos con 2 sist. de coordenadas (ver dibujo). Empecemos expresando la energía cinética de cada partícula

▷ $K_1 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)$

▷ $K_2 = \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2$

donde, por enunciado, $r = R \Rightarrow \dot{r} = 0$. Además, el problema solo tiene 2 grados de libertad, y viendo los K_i, a priori, tendríamos 3: θ, ϕ y z. Sucede que por geometría z y θ están relacionados



$$(1) \quad (R - z) + R\theta = \frac{\pi R}{2} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow -\dot{z} + R\dot{\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{z} = R\dot{\theta}}$$

Ocupando esta relación y juntando los K_i:

- $K = \sum_i K_i = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 \left(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) + \frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\theta}^2$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\theta$$

Haciendo esto nos damos cuenta que es más sencillo relacionar distintos sist. de coordenadas que ocupando segunda ley de Newton, ya que ya no necesitamos descomponer vectores

Calculemos la energía potencial actuando sobre cada partícula. Para ambas partículas solo tenemos la energía potencial gravitatoria

- $U_1 = m_1 g z_1 = m_1 g R \cos\theta$
- $U_2 = m_2 g z_2 \overset{\text{por (1)}}{=} m_2 g R \left(1 - \frac{\pi}{2} + \theta \right)$

$$= m_2 g R \theta + a \,, \quad \text{con } a = m_2 g R \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) \text{ constante}$$

No nos interesa la forma de a, solo que es una cte., ya que como calcularemos las ecs. de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \,,$$

al ser derivadas, las ctes no contribuyen. Así que el potencial sería

- $U = \sum_i U_i = U_1 + U_2 = m_1 g R \cos\theta + m_2 g R \theta.$

Pero, ¿Qué sucede con la fuerza normal que ejerce la esfera sobre m_1 y la tensión de la cuerda? Buena pregunta estudiante!! Sucede que ambas fuerzas son fuerzas de restricción, ya que no son fuerzas disipativas y sus contribuciones se ven expresadas en las coordenadas de las partículas.

Notamos que si no existiera $\vec{N}$ y/o $\vec{T}$, ambas partículas serían partículas libres (en un cpo. gravitacional) e incomunicadas entre ellas. La contribución de $\vec{N}$ en el sist. queda completamente contenido en que $r = R$ cte, es su única "misión", realmente no nos interesa su expresión en particular (como si lo necesitábamos con Newton), solo como restringe el movimiento de m_1.

Mientras que la contribución de $\vec{T}$ se expresa en la relación directa entre z y θ, Ec. (1), nos dice cómo se mueve m_2 cuando se mueve m_1 y viceversa.

Para los interesados, estas fuerzas de restricción se pueden calcular ocupando multiplicadores de Lagrange (igual que en CVV al ser restricciones), es de cursos más avanzados, pero pueden ver un ej. en: https://www.cec.uchile.cl/~javier.huenupi/img/Aux_1_MC_2023_2.pdf

Ahora sí, el Lagrangiano sería

$$L = K - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\theta - m_1 g R\cos\theta - m_2 g R \theta$$

que depende solo de θ y ϕ (y sus derivadas) como se solicita.

b) Las ecs. de E-L se calculan como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

donde en nuestro problema $q = \theta, \phi$. Calculemos la ec. para θ

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = m_1 R^2 \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta + m_1 g R \sin\theta - m_2 g R$

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 + m_2) R^2 \dot{\theta} \implies \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (m_1 + m_2) R^2 \ddot{\theta}$

$$\therefore \; (m_1 + m_2) R^2 \ddot{\theta} - m_1 R^2 \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - m_1 g R \sin\theta + m_2 g R = 0 \quad (2)$$

Y para ϕ sería:

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_1 R^2 \dot{\phi} \sin^2\theta$

$$\therefore \; \frac{d}{dt}\left(m_1 R^2 \dot{\phi} \sin^2\theta\right) = 0 \quad (3)$$

c) De (3) comprobamos lo que era esperable: hay conservación del momentum angular debido a la simetría angular del problema. En particular tendríamos

$$\dot{\phi}\sin^2\theta = \dot{\phi}_0 \sin^2\theta_0$$

$$= \frac{3}{4}\omega_0 \quad , \text{ ya que } \dot{\phi}_0 = \omega_0 \wedge \theta_0 = \pi/3$$

$$\iff \dot{\phi} = \frac{3\omega_0}{4\sin^2\theta}$$

Con esta expresión de $\dot{\phi}$ podemos reemplazar en (2)

$$\Rightarrow (m_1+m_2)R^2\ddot{\theta} - m_1 R^2 \frac{9\omega_0^2}{16\sin^4\theta}\sin\theta\cos\theta - m_1 g R\sin\theta + m_2 g R = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_1+m_2)R^2\ddot{\theta} - \frac{9}{16} m_1 R^2 \omega_0^2 \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - m_1 g R\sin\theta + m_2 g R = 0 \quad (4)$$

d) Nos piden encontrar un ω_0 t.q. la partícula esté girando indefinidamente en $\theta = \pi/3$. Para que $\theta = \pi/3$ cte. $\forall t$ necesitamos que $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ $\forall t$, así que reemplazando en (4)

$$\Rightarrow -\frac{9}{16} m_1 R^2 \omega_0^2 \frac{1}{2}\frac{8}{3^{3/2}} - m_1 g R\frac{\sqrt{3}}{2} + m_2 g R = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}\left(\frac{m_2}{m_1}\frac{g}{R} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{R}\right)}$$