Auxiliar 18

Órbitas de planetas

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

P1.- [Scattering de Rutherford]

Desde muy lejos se lanza con velocidad v_0 una partícula de carga eléctrica q_1 y masa m, contra otra partícula que posee únicamente carga q_2 (masa despreciable), produciendo sobre la primera una fuerza repulsiva de magnitud $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ (considere que la carga q_2 no se mueve en todo el problema). La recta en la que la partícula q_1 inicia su movimiento pasa a distancia b del centro de fuerza (posición de la carga q_2). Calcule la distancia r_{min} que logra tener la partícula con el centro de fuerza.

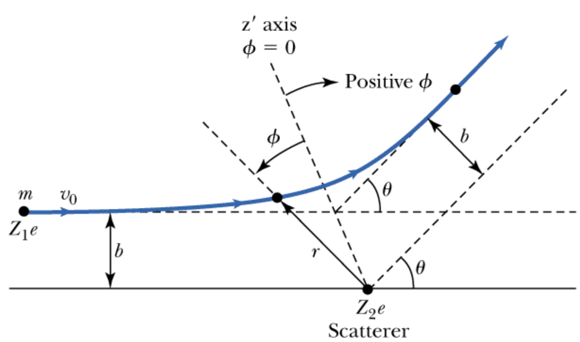


Figura 1: Trayectoria partícula scattereada P1

P1.- [Starlink]

Dos satélites de Elon Musk, de la empresa Starlink, S_1 y S_2, cada uno de masa m, están describiendo órbitas cerradas en un mismo plano y en el mismo sentido. S_1 está en una órbita circunferencial de radio R y S_2 está en una órbita elíptica caracterizada por $r_{min} = R$ y $r_{max} = 8R$. Debido a la gran cantidad de estos satélites en el espacio, en un cierto momento ambos satélites chocan (la duración del choque se supone como nulo) formando una sola gran masa S_{12}. Durante el choque se conserva el momentum total, pero no la energía. Determine:

a) El cociente entre la suma de las energías cinéticas $K_1 + K_2$ y K_{12}

b) Determine las características de la orbita de S_{12}

Formulario

Ecuación de Binet

A partir de una (o unas) fuerza central de la forma

$$\vec{F} = \sum_i F_i(r)\hat{r} = F(r)\hat{r}$$

por Segunda Ley de Newton tenemos

$$m\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$
$$\Rightarrow m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + F(r),$$

obtenemos la ecuación de Binet

$$w'' + w = -\frac{m}{l^2}\frac{F(1/w)}{w^2},$$

donde $w(\phi) = 1/r(\phi)$ y $l = r_0 v_{T,0}$ es el momentum angular **constante**. Para el caso de **una** fuerza gravitacional, la ecuación es

$$w'' + w = \frac{GMm^2}{l^2}$$
$$\Rightarrow w(\phi) = A\cos(\phi) + \frac{GMm^2}{l^2} = \frac{1}{r(\phi)}$$

Órbitas planetarias

Para un caso general podemos escribir el radio de la órbita (para cualquier fuerza) como

$$r(\phi) = \frac{R}{1 + e\cos\phi}$$

donde para **planetas** tenemos

$$R = \frac{l^2}{GMm^2}, \qquad e^2 = 1 + \frac{2El^2}{(GM)^2 m^3},$$

por lo que tenemos que las órbitas siguen

- Elipses: $e^2 < 1 \Rightarrow E < 0$
- Parábolas: $e^2 = 1 \Rightarrow E = 0$
- Hipérbolas: $e^2 > 1 \Rightarrow E > 0$

Auxiliar 18

P1

Como tenemos una fuerza central, se conserva la energía mecánica así que calculamos el potencial como

$$U = -\int_{r_0}^{r} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\int \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

* Considerando la masa de q_2 como 0, no hay fuerza gravitacional. Sería fácil agregarla ya que es igual que la de Coulomb, pero con otra constante

Tenemos que inicialmente la partícula q_1 tiene velocidad v_0 y como es lanzada desde muy lejos, en ese momento no siente la interacción con q_2, ya que

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Así que

$$E_0 = \frac{1}{2}m v_0^2 + \cancel{U(r=\infty)}^{\,0} = \frac{1}{2}m v_0^2$$

si consideramos la masa de q_1

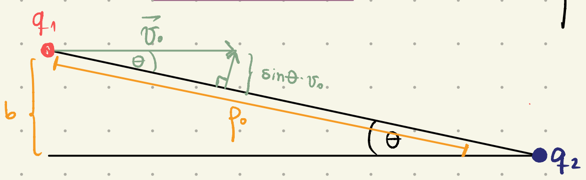
Mientras que para el momento final (en el momento que q_1 está a r_{min} de q_2), usamos el mismo argumento que hemos ocupado en los otros auxiliares:

ver aux 15 si no queda claro

"$\boxed{U(r_{min})}$ es mínimo, por lo que K es máximo y $\dot{r} = 0$"

Escribiendo $|\vec{v}|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$ y como se conserva el momentum angular

Condición inicial



$$\rho^2\dot{\theta} = \rho_0 v_{T,0}$$

$$= \rho_0 v_0 \boxed{\sin\theta}$$

$$= \rho_0 v_0 \boxed{\frac{b}{\rho_0}} = v_0 b$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_f|^2 = \cancel{\dot{\rho}_f^2}^{\,0} + r_{min}^2 \cdot \left(\frac{v_0 b}{r_{min}^2}\right)^2 = \boxed{\frac{v_0^2 b^2}{r_{min}^2}}$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}m \boxed{\frac{v_0^2 b^2}{r_{min}^2}} + \boxed{\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_{min}}}$$

Usando conservación de E

$$\Rightarrow E_0 = E_f$$

$$\frac{1}{2}m v_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2 b^2}{r_{min}^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_{min}} \qquad /\cdot r_{min}^2$$

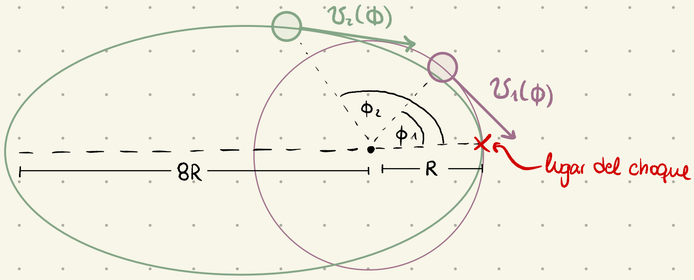
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 \cdot r_{min}^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 b^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot r_{min}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot r_{min}^2 + b \cdot r_{min} + c = 0$$

$$\Rightarrow r_{min\,1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ lo reemplazam ustedes

P2

Con la info que nos entregan sabemos de qué órbita se trata y podemos calcular la energía de cada satélite antes del choque



Para S_1 tenemos que al tratarse de una órbita circular $e_1 = 0$ (excentricidad)

$$\Rightarrow 0 = 1 + \frac{2E_1 \ell_1^2}{(GM_\otimes)^2 m^3}$$

$$\Rightarrow E_1 = -\frac{(GM_\otimes)^2 m^3}{2\ell_1^2}$$

debemos calcularlo

Como es circunferencial, $\tilde{R} = R$ (ver formulario), además

$$\tilde{R} = \frac{\ell_1^2}{GM_\otimes m^2} = R$$

$$\Leftrightarrow \ell_1^2 = GM_\otimes m^2 R$$

Reemplazando en la energía

$$\Rightarrow E_1 = -\frac{(GM_\otimes)^{\cancel{2}} m^{\cancel{3}}}{2\cancel{GM_\otimes}\cancel{m^2}R} = -\frac{1}{2}\frac{GM_\otimes m}{R}$$

Expresando la energía en su forma general, pero evaluada en el lugar de la colisión ($\phi = 0 \wedge r = R$)

$$E_1 = K_1 - \frac{GM_\otimes m}{R} = -\frac{1}{2}\frac{GM_\otimes m}{R}$$

$$\Leftrightarrow K_1 = \frac{1}{2}\frac{GM_\otimes m}{R}$$

Para S_2 conocemos las distancias mínima y máxima al foco, además tenemos la relación

$$\boxed{r_{min}} = \frac{\tilde{R}}{1+e} \quad \wedge \quad \boxed{r_{max}} = \frac{\tilde{R}}{1-e}$$ } Salen de evaluar $r(\phi)$ en $\phi = 0$ y $\phi = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{R} = \frac{\tilde{R}}{1+e_2} \quad \wedge \quad \boxed{8R} = \frac{\tilde{R}}{1-e_2}$$

$$\Rightarrow R(1+e_2) = 8R(1-e_2)$$

$$\Leftrightarrow 9Re_2 = 7R$$

$$\Leftrightarrow e_2 = \frac{7}{9}$$

obteniendo el parámetro $\tilde{R} \Rightarrow R = \dfrac{\tilde{R}}{1+7/9} \Leftrightarrow \dfrac{16}{9} R = \tilde{R}$

Por lo que la energía está dada por

$$\frac{49}{81} = 1 + \frac{2E_2 \ell_2^2}{(GM_\oplus)^2 m^3} \Leftrightarrow E_2 = -\frac{32}{81} \frac{(GM_\oplus)^2 m^3}{2\ell_2^2}$$

También tenemos la relación $\tilde{R} = \dfrac{\ell^2}{GM_\oplus m^2} \Rightarrow \ell_2^2 = \dfrac{16}{9} R \, GM_\oplus m^2$

$$\Rightarrow E_2 = -\frac{\cancel{16}}{{}^{9}\cancel{81}} \frac{(GM_\oplus)^{\cancel{2}} m^{\cancel{3}}}{\cancel{GM_\oplus m^2}} \frac{\cancel{9}}{\cancel{16}R} = -\frac{1}{9} \frac{GM_\oplus m}{R}$$

Ocupando la expresión general de E, evaluada en el lugar del choque $\phi = 0 \wedge r = R$

$$E_2 = K_2 - \frac{GM_\oplus m}{R} = -\frac{1}{9} \frac{GM_\oplus m}{R}$$

$$\Leftrightarrow K_2 = \frac{8}{9} \frac{GM_\oplus m}{R}$$

[Post colisión] En las colisiones se conserva el momentum, pero no la energía mecánica, así que

$$m v_1 + m v_2 = (m+m) v_{12} \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 2 v_{1,2}$$

← forman un solo cuerpo

de la parte anterior podemos obtener estos términos

- $K_1 = \frac{1}{\cancel{2}} m v_1^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{GM_\oplus m}{R} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}}$
- $K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{8}{9} \frac{GM_\oplus m}{R} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{16}{9} \frac{GM_\oplus}{R}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}}$

Reemplazando $\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}} = 2v_{1,2}$

$$\Rightarrow v_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}} + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}$$

$$\Rightarrow K_{1,2} = \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM_\odot}{R}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8}m\left(\frac{GM_\odot}{R} + \frac{8}{3}\frac{GM_\odot}{R} + \frac{4}{3}\frac{GM_\odot}{R}\right)$$

$$= \frac{1}{8}m\frac{GM_\odot}{R}\left(1 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{8}\frac{GM_\odot m}{R}$$

Y la suma de K_1 y K_2

$$K_1 + K_2 = \frac{1}{2}\frac{GM_\odot m}{R} + \frac{8}{9}\frac{GM_\odot m}{R} = \frac{25}{18}\frac{GM_\odot m}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{K_{1,2}}{K_1 + K_2} \approx 0.45 \Rightarrow K_1 + K_2 > K_{1,2}$$

b) Calculemos la energía mecánica del nuevo objeto (esta energía se conserva después del choque)

$$E_{1,2} = \frac{5}{8}\frac{GM_\odot m}{R} - \frac{GM_\odot 2m}{R} \quad v_{1,2}(r=R)$$

$$= -1.375\frac{GM_\odot m}{R} < 0$$

$\therefore$ La órbita es una elipse $(E<0)$

Con la energía calculada, y pudiendo calcular el momentum angular conservado

$$mRv_{1,2} = \ell_{1,2}$$

pueden calcular la excentricidad.