# Auxiliar 17

Torque III y partículas acopladas

**Profesor: Gonzalo Palma**
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

## P1.- Torque o energía

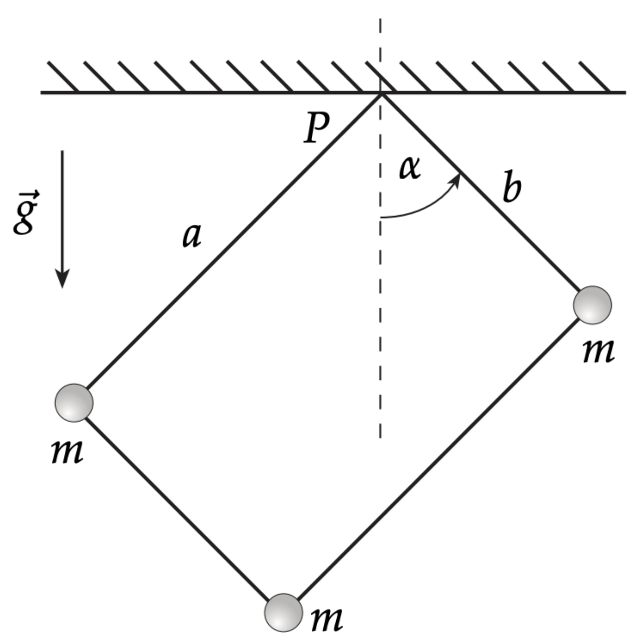
Tres partículas de masa $m$ están en los vértices de un rectángulo de $a \times b$, formado por varas ideales de masa despreciable. El cuarto vértice está fijo a un punto $P$ (ver figura). El rectángulo puede girar en torno a un eje que pasa por $P$ y es perpendicular a la figura.

a) Usando torque y momentum angular calcule la ecuación de movimiento para el ángulo con respecto a la vertical $\phi$ (en la figura es $\alpha$)

b) Usando a) calcule el punto de equilibrio del sistema

c) Usando aproximación en serie de Taylor encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio

d) Para comprobar su resultado anterior, exprese en función de $\phi$ la energía potencial del sistema y con esta calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones



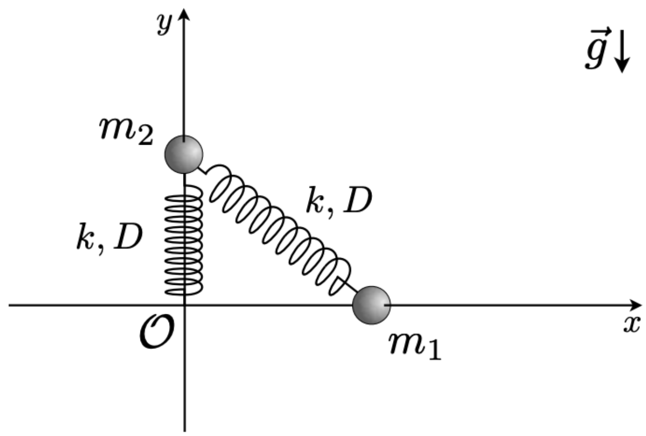
**P2.-** Materia nueva

Consideremos una partícula de masa $m_2$ confinada a moverse por el eje $y$, unida al origen a través de un resorte de largo natural $D$ y constante elástica $k$. Una segunda partícula de masa $m_1$ confinada a moverse por el eje $x$, permanece unida a $m_2$ mediante un resorte idéntico al primero (ver figura). Considere que hay aceleración de gravedad $\vec{g}$.

a) Exprese el potencial total del sistema

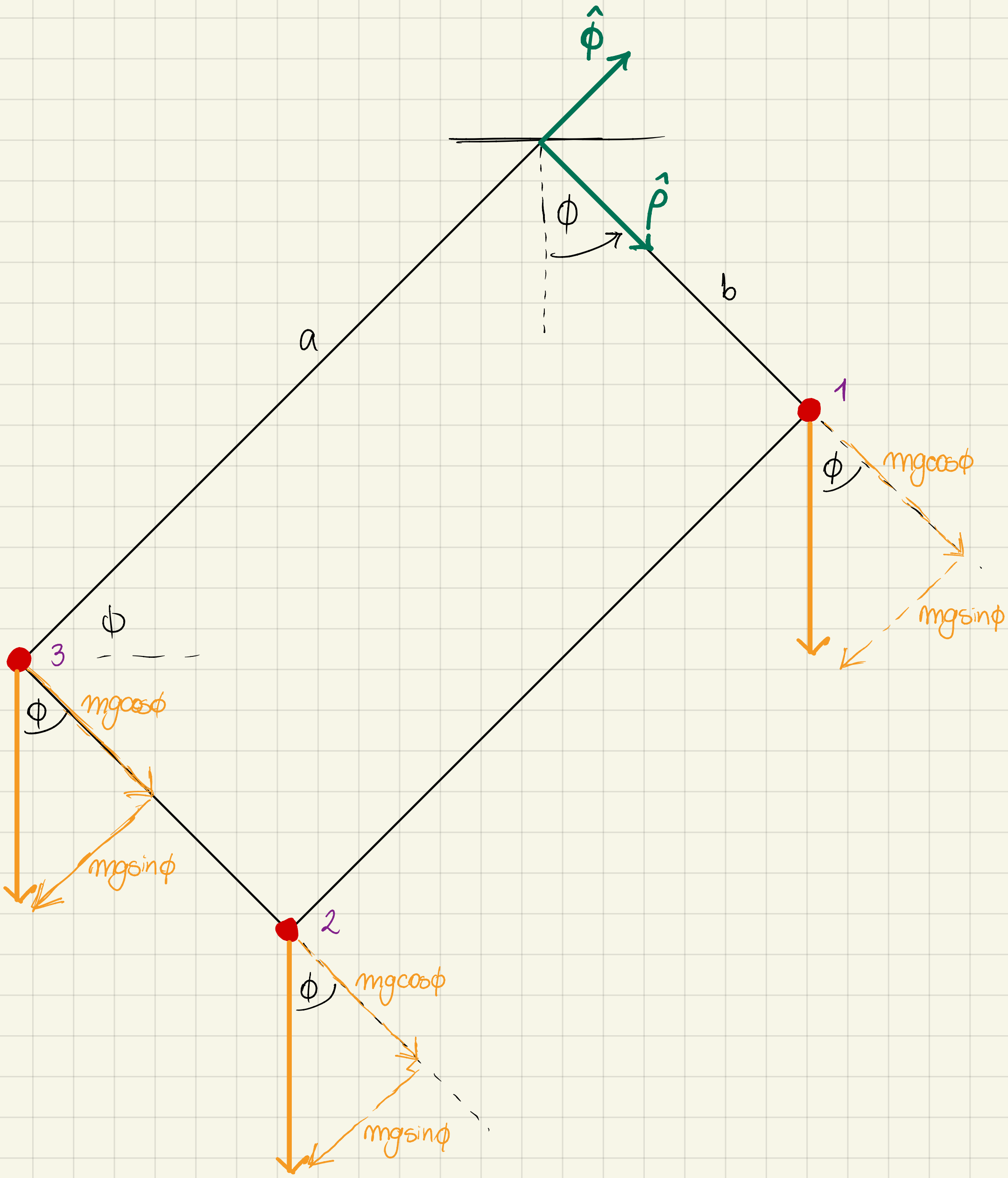
b) Encuentre los puntos de equilibrio

c) Encuentre las ecuaciones de movimiento de las partículas



# Auxiliar 17

## P1




Sabemos que con la ecuación maestra

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

conseguiremos la ec. de mov. para el ángulo $\phi$ y con esto podremos hacer Taylor (si es que es necesario) y conseguir la ec. de mov. de un oscilador armónico donde podremos identificar la frecuencia de pequeños oscilaciones

Primero definamos la posición de cada masa ocupando un sist. cilíndrico centrado en el pivote

▷ $\vec{r}_1 = b\hat{\rho}$ ▷ $\vec{r}_2 = b\hat{\rho} - a\hat{\phi}$ ▷ $\vec{r}_3 = -a\hat{\phi}$

con esto podemos calcular las velocidades derivando una vez

▷ $\vec{v}_1 = b\dot{\phi}\hat{\phi}$ ▷ $\vec{v}_2 = b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{\rho}$ ▷ $\vec{v}_3 = a\dot{\phi}\hat{\rho}$

así que los momentums angular serían ($\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$)

$$\vec{L}_1 = m\, b\hat{\rho} \times (b\dot{\phi}\hat{\phi}) = mb^2\dot{\phi}\hat{k}$$

$$\vec{L}_2 = m(b\hat{\rho} - a\hat{\phi}) \times (b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{\rho}) = m(b^2 + a^2)\dot{\phi}\hat{k}$$

$$\vec{L}_3 = m \cdot (-a\hat{\phi}) \times (a\dot{\phi}\hat{\rho}) = ma^2\dot{\phi}\hat{k}$$

$$\therefore \vec{L}_{tot} = m(2b^2 + 2a^2)\dot{\phi}\hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = 2m(a^2 + b^2)\ddot{\phi}\hat{k}$$

Ahora calculemos los torques. Notemos que como ocupamos el mismo sist. de coord. para las 3 partículas, la fuerza peso para las 3 partículas es:

$$m\vec{g} = mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}$$

así que los torques ($\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$) serían

$$\vec{\tau}_1 = b\hat{\rho} \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = -mgb\sin\phi\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_2 = (b\hat{\rho} - a\hat{\phi}) \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = -mgb\sin\phi\,\hat{k} + mga\cos\phi\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_3 = -a\hat{\phi} \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = mga\cos\phi\,\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\tau}_{tot} = 2mga\cos\phi\,\hat{k} - 2mgb\sin\phi\,\hat{k}$$

Así que la ec. maestra quedaría como

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow 2mga\cos\phi\,\hat{k} - 2mgb\sin\phi\,\hat{k} = 2m(a^2 + b^2)\ddot{\phi}\hat{k}$$

$$\Rightarrow ga\cos\phi - gb\sin\phi = (a^2 + b^2)\ddot{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi} = \frac{ga\cos\phi - gb\sin\phi}{a^2 + b^2}$$

**b)** Ahora, los puntos de equilibrio se dan donde la suma de fuerzas es 0 (por eso $\partial U/\partial q \overset{!}{=} 0$), o sea que la aceleración en ese eje sea 0 (por Newton), entonces imponemos que $\ddot{\phi} \overset{!}{=} 0$ y despejamos $\phi_{eq}$ que cumpla eso

$$\Rightarrow 0 = \frac{ga\cos\phi_{eq} - gb\sin\phi_{eq}}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a\cos\phi_{eq} = b\sin\phi_{eq} \Leftrightarrow \tan\phi_{eq} = \frac{a}{b}$$

y por enunciado nos dicen que consideremos $a = \sqrt{3} \cdot b$

$$\Rightarrow \tan\phi_{eq} = \sqrt{3} \iff \phi_{eq} = \frac{\pi}{3}$$

**c)** Ya tenemos el pto. de equil., así que calculemos la frecuencia de pequeñas oscilaciones. Tenemos la EDO

$$\ddot{\phi} = \frac{ga}{c^2}\cos\phi - \frac{gb}{c^2}\cos\phi \text{ , donde definí } c^2 \equiv a^2 + b^2$$

entonces debemos considerar una pequeña variación en torno al ángulo de equil., o sea algo como

$$\phi(t) = \frac{\pi}{3} + \delta(t), \text{ donde } \delta \ll 1 \quad (\text{una pequeña variación})$$

Ojo que $\delta$ sería variable. Entonces reemplacemos en la EDO

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\pi/3 + \delta(t)\right) = \frac{ga}{c^2}\cos(\pi/3 + \delta) - \frac{gb}{c^2}\sin(\pi/3 + \delta) \quad ⊛$$

donde el primer término solo quedaría como $\ddot{\delta}(t)$, y para las funciones trigonom. usamos las propiedades

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

entonces

- $\cos(\pi/3+\delta) = \cos(\pi/3)\cos(\delta) - \sin(\pi/3)\sin(\delta) \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta$
- $\sin(\pi/3+\delta) = \sin(\pi/3)\cos(\delta) + \cos(\pi/3)\sin(\delta) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\delta}{2}$

donde en el último paso usamos la aproximación $\cos(\delta) \approx 1$ y $\sin(\delta) \approx \delta$ ya que $\delta \ll 1$. Reemplazamos en ⊛

$$\Rightarrow \ddot{\delta} = \frac{ga}{c^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\right) - \frac{gb}{c^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\delta\right)$$

$$\iff \ddot{\delta} = -\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{gb}{c^2}\right]\cdot\delta + \frac{ga}{2c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{gb}{c^2}$$

$$\iff \ddot{\delta} = -\omega_0^2\delta + \frac{ga}{c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{gb}{c^2} \text{ , donde definí } \omega_0^2 \equiv \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{gb}{c^2}\right]$$

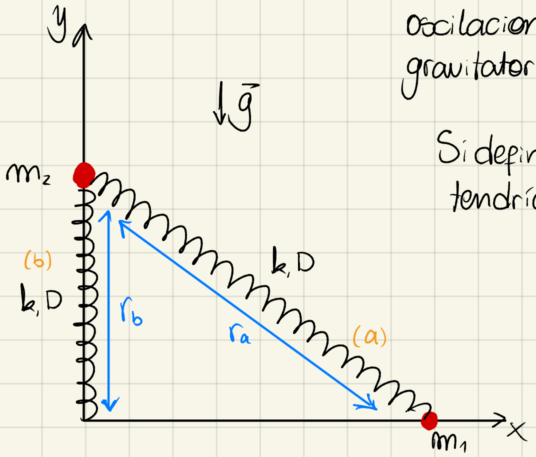
y si hacemos el c.v. $\tilde{\delta} = \delta - \frac{1}{\omega_0^2}\left[\frac{ga}{c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{gb}{c^2}\right] \Rightarrow \ddot{\tilde{\delta}} = \ddot{\delta}$ y la EDO que nos queda es

$$\ddot{\tilde{\delta}} = -\omega_0^2 \tilde{\delta}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\tilde{\delta}} + \omega_0^2 \delta = 0$$

que es la EDO de un oscilador armónico con frecuencia de oscilación $\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{gb}{c^2}}$ que sería nuestra frecuencia de pequeñas oscilaciones.

# P2




Como han visto en clases, podemos encontrar la ec. de mov para pequeñas oscilaciones ocupando el potencial. Tenemos el potencial elástico y el gravitatorio.

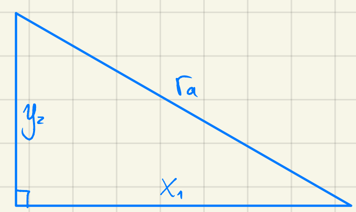
Si definimos el potencial gravitatorio como 0 en la altura $y=0$, solo la masa $m_2$ tendría este potencial distinto de 0

$$\Rightarrow U_g = m_2 g y_2 \quad (1)$$

donde definimos las coordenadas de $m_1$ con $(x_1, y_1) = (x_1, 0)$ y para $m_2$ con $(x_2, y_2) = (0, y_2)$

Ahora, tenemos dos resortes por lo que tenemos dos contribuciones al potencial elástico

$$U_e = \frac{1}{2} k (r_a - D)^2 + \frac{1}{2} k (r_b - D)^2$$




donde $r_b = y_2$ y $r_a$ lo podemos calcular con pitágoras

$$r_a = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$$

$$\therefore U_e(x_1, y_2) = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x_1^2 + y_2^2} - D\right)^2 + \frac{1}{2} k (y_2 - D)^2 \quad (2)$$

Ahora calculemos los puntos de equilibrio que deben satisfacer

$$\frac{\partial U_{tot}(x_1, y_2)}{\partial x_1} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial U_{tot}(x_1, y_2)}{\partial y_2} = 0 \quad (3)$$

ya que hay dos grados de libertad. Ocupando (1) y (2) en (3)

- $$\frac{\partial U_{tot}(x_1, y_2)}{\partial x_1} = k\left(\sqrt{x_1^2 + y_2^2} - D\right) \frac{x_1}{(x_1^2 + y_2^2)^{1/2}} \overset{!}{=} 0 \quad (4)$$

- $$\frac{\partial U_{tot}(x_1, y_2)}{\partial y_2} = k\left(\sqrt{x_1^2 + y_2^2} - D\right) \frac{y_2}{(x_1^2 + y_2^2)^{1/2}} + k(y_2 - D) + m_2 g \overset{!}{=} 0 \quad (5)$$

Resolviendo esto al ojímetro, notamos que si los últimos dos términos en (5) los igualo a 0, osea

$$k(y_2 - D) + m_2 g \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow y_2 = -\frac{m_2 g}{k} + D$$

entonces para este $y_2$ el primer término de (5) también tiene que ser 0

$$k\left(\sqrt{x_1^2+y_2^2}-D\right)\frac{y_2}{(x_1^2+y_2^2)^{1/2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2+y_2^2}-D=0$$

$$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{D^2-y_2^2}$$

$$= \sqrt{D^2-(m_2g/k+D)^2}$$

que notamos que también soluciona (4), por lo que este punto sería un pto. de equilibrio

$$\Rightarrow (x_{1,e}, y_{2,e}) = \left(\sqrt{D^2-(m_2g/k+D)^2},\ -m_2g/k+D\right)$$

Ahora calculamos las segundas derivadas y evaluamos en $(x_{1,e}, y_{2,e})$ (hagámlo ustedes, no me pagan tanto)

- $\left.\dfrac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1^2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})} = \dfrac{m_2 g\,(D+y_{2,e})}{D^2}$

- $\left.\dfrac{\partial^2 U_{tot}}{\partial y_2^2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})} = \dfrac{k\,(x_{1,e}^2+2y_{2,e}^2)}{D^2}$

- $\left.\dfrac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1\partial y_2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})} = \left.\dfrac{\partial^2 U_{tot}}{\partial y_2\partial x_1}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})} = \dfrac{k\,x_{1,e}\,y_{2,e}}{D^2}$

Entonces, reemplazamos en $m\ddot{\vec{r}}_i + \nabla U = 0$, usando

$$U(x_1,y_2) = U(x_{1,e},y_{2,e}) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1^2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})}(x_1-x_{1,e})^2$$
$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial y_2^2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})}(y_2-y_{2,e})^2$$
$$+\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1\partial y_2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})}(x_1-x_{1,e})(y_2-y_{2,e})$$

donde para considerar pequeñas oscilaciones hacemos $x_1 = x_{1,eq} + \delta x_1 \ \wedge\ y_2 = y_{2,e} + \delta y_2$

$$\Rightarrow U(x_1,y_2) \approx U(x_{1,e},y_{2,e}) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1^2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})}\delta x_1^2$$
$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial y_2^2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})}\delta y_2^2$$
$$+\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1\partial y_2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1,e},y_{2,e})}\delta x_1\cdot\delta y_2 \quad (6)$$

y las ecs. de movimiento serían

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \nabla U = 0$$

dependencia. NO está multiplicando

$$\Rightarrow m_1 \delta \ddot{x}_1 + \frac{\partial U \overbrace{(\delta x_1, \delta y_2)}}{\partial(\delta x_1)} = 0$$

$$(6): \quad m_1 \delta \ddot{x}_1 + \left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1^2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1e},y_{2e})} \delta x_1 + \left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1 \partial y_2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1e},y_{2e})} \cdot \delta y_2 = 0 \quad (7)$$

y para $m_2$, $m_2 \ddot{\vec{r}}_2 + \nabla U = 0$

$$\Rightarrow m_2 \delta \ddot{y}_2 + \frac{\partial U(\delta x_1, \delta y_2)}{\partial(\delta y_2)} = 0$$

$$(6): \quad m_2 \delta \ddot{y}_2 + \left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial y_2^2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1e},y_{2e})} \delta y_2 + \left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1 \partial y_2}\right|_{(x_1,y_2)=(x_{1e},y_{2e})} \delta x_1 = 0 \quad (8)$$

donde (7) y (8) son las ecs. de mov. que gobiernan nuestro sist. y las derivadas ya fueron calculadas