# Auxiliar 16

## Sistemas de referencia no inercial

**Profesor: Patricio Aceituno**
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

**P1.-**

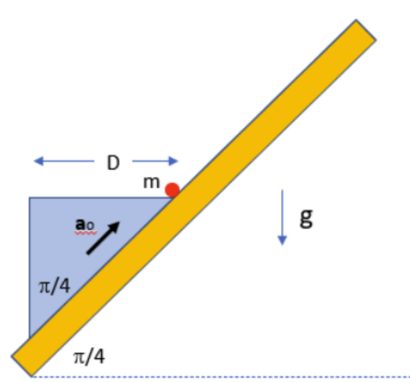
Considere el sistema Sol-Tierra, con la masa del Sol mucho mayor a la de la Tierra, $M >> m$, ambos sujetos únicamente a la fuerza de gravitación mutua. Defina un sistema de referencia inercial $S$ con origen en el centro del Sol, de vectores unitarios $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. Defina también un sistema de referencia no inercial $S'$, con el mismo origen pero con vectores unitarios $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}')$. El sistema de referencia $S'$ es tal que su eje $x'$ está fijo a la Tierra y por lo tanto rota con respecto a los ejes coordenados del sistema $S$ según $\vec{\omega} = \dot{\phi}(t)\hat{k}$. Demuestre que usando la ecuación de movimiento en el sistema de referencia no inercial $S'$, se pueden deducir las ecuaciones diferenciales del problema de gravitación del sistema Sol-Tierra, esto es:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \quad \wedge \quad m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{l^2}{mr^3}$$

**P2.-** **(P. Aceituno Ejercicio 3 2021-2)**

Una cuña de lado D y ángulo $\alpha = \pi/4$ es forzada a moverse a partir del reposo, con una aceleración constante $a_0$ a lo largo de una rampa inclinada en un ángulo $\pi/4$ con respecto a la horizontal. Como resultado del movimiento de la rampa una partícula de masa $m$ que se encuentra en reposo en el extremo derecho de la superficie horizontal se pone en movimiento relativo respecto de la rampa.

Determine el tiempo que tarda la partícula en llegar al extremo izquierdo de la superficie horizontal de la rampa.

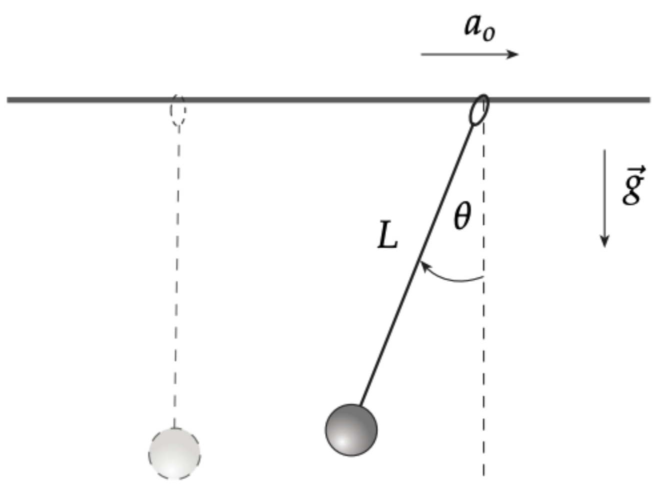


**P3.-**

Considere un péndulo simple de largo $L$ y masa $m$ que cuelga de un anillo que se puede mover libremente a lo largo de una barra horizontal. Estando el péndulo en reposo, se impulsa el anillo con una aceleración $a_0$ constante a lo largo de la barra. Determine:

a) Máxima desviación del péndulo con respecto a la vertical.

b) Tensión máxima que experimenta la cuerda y el ángulo con respecto a la vertical donde ésta se alcanza.

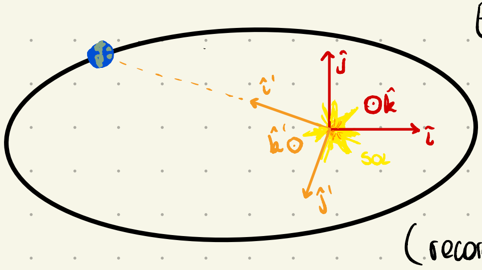


# Auxiliar 16

## P1

Para sist. de referencia no inerciales tenemos la siguente ec. que considera fuerzas reales y ficticias

$$m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')}_{\text{centrifuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{azimutal}}$$




En este caso tenemos que el origen de nuestro SRNI $(\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}')$ está siempre en el origen del SRI $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$

$$\Rightarrow \vec{R} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$$

Ahora describamos $\vec{r}'$ y $\dot{\vec{r}}' = \vec{v}'$. Como la Tierra siempre está en el eje $\hat{\imath}'$ (recordar que el SRNI sigue el mov. de la Tierra), entonces

$$\vec{r}' = r\hat{\imath}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \dot{r}\hat{\imath}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{\imath}'$$

Y tenemos que $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{k}$, donde $\hat{k} = \hat{k}'$, así que calculemos las fzas. ficticias

- $-m\ddot{\vec{R}} = 0$
- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = -m\dot{\phi}\hat{k}'\times(\dot{\phi}\hat{k}'\times r\hat{\imath}') = -m\dot{\phi}\hat{k}\times\dot{\phi}r\hat{\jmath}' = m\dot{\phi}^2 r\hat{\imath}'$
- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m\dot{\phi}\hat{k}'\times\dot{r}\hat{\imath}' = -2m\dot{\phi}\dot{r}\hat{\jmath}'$
- $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = -m\ddot{\phi}\hat{k}'\times r\hat{\imath}' = -m\ddot{\phi}r\hat{\jmath}'$

Y la única fuerza **real** es la de gravedad que descrita en el sist. de SRNI es

$$m\vec{a} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\imath}'$$

juntamos todo

$$\Rightarrow m\ddot{r}\hat{\imath}' = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\imath} + m\dot{\phi}^2 r\hat{\imath}' - 2m\dot{\phi}\dot{r}\hat{\jmath}' - m\ddot{\phi}r\hat{\jmath}',$$ y las ecs. escalares serían

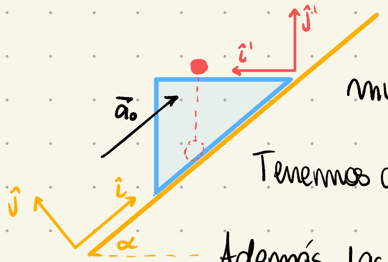
$\hat{\imath}'$) $m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + m\dot{\phi}^2 r\hat{\imath}$

$\hat{\jmath}'$) $0 = -2m\dot{\phi}\dot{r} - m\ddot{\phi}r = -\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\phi} = \ell$

por lo que la ec. en $\hat{\imath}'$ queda $m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3}$

# P2

Definimos el SRNI con origen en el extremo superior derecho de la cuña (donde comienza la bolita) que se mueve de forma acelerada c/r a la rampa, que es un SRI al estar quieto. Definimos el origen del SRI en la parte inferior de la rampa, con el eje $\hat{\imath}$ paralelo a la rampa




Como los sist.s siempre está alineados, no rotan c/r a ellos $\vec{\Omega}=0$, lo que simplifica mucho la expresión

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} \quad (1)$$

Tenemos que $\ddot{\vec{R}} = a_0\hat{\imath}$ que debemos describir en el SRNI

$$\ddot{\vec{R}} = a_0(-\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{j})$$

Además, las fuerzas reales actuando sobre la masa, son: la gravedad y la normal de la cuña

$$\Rightarrow m\vec{a} = -mg\hat{j}' + N\hat{j}'$$

Así que (1) nos queda como

$$m(\ddot{x}'\hat{\imath}' + \ddot{y}'\hat{j}') = -mg\hat{j} + N\hat{j} - ma_0(-\cos\alpha\,\hat{\imath}' + \sin\alpha\,\hat{j}')$$

y las ecs. escalares

$$\hat{\imath}')\ m\ddot{x}' = ma_0\cos\alpha$$
$$\hat{j}')\ m\ddot{y}' = -mg\hat{j}' + N\hat{j} - ma_0\sin\alpha\,\hat{j}'$$

Solo nos interesa $\hat{\imath}')$, ya que queremos saber cuándo llega al borde (mov. horizontal), así que trabajamos esta expresión

$$m\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}'} d\dot{x}' = ma_0\cos\alpha\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow m\dot{x}' = ma_0\cos\alpha\, t$$

$$\Rightarrow m\int_{x_0'}^{x} dx' = ma_0\cos\alpha\int_0^t t\,dt$$

$$\Leftrightarrow m\,x'(t) = ma_0\cos\alpha\,\frac{t^2}{2}$$

donde consideramos que parte en el origen del SRNI (es arbitrario) y parte con velocidad nula.

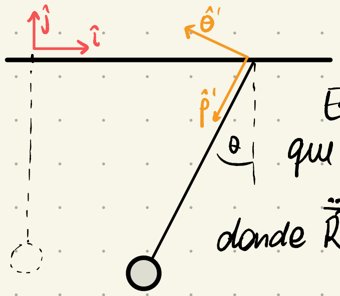
Así que veamos cuándo $x'(t^*) = D$

$$\Rightarrow mD = ma_0\cos(\pi/4)\,\frac{t^{*2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^{*2} = \frac{2D}{a_0\cos\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}D}{a_0} \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}D}{a_0}}$$

# P3

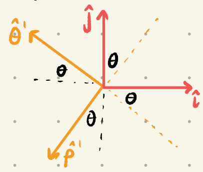
Definimos el SRNI con un sist. de coordenadas polares con origen en el origen del péndulo, que se mueve con aceleración $a_0$. Nuestro SRI será un sist. cartesiano con origen donde parte el movimiento y con $\hat{\imath}$ paralelo a la barra




Nuestro $\vec{r}'$ es el $\vec{r}$ de polares $\Rightarrow \vec{r}' = L\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = L\dot{\theta}\hat{\theta}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = -L\dot{\theta}^2\hat{\rho}' + L\ddot{\theta}\hat{\theta}' = \vec{a}'$

Este sist. en polares tiene contemplado el mov. angular, por lo que $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\Omega}} = 0$, así que la ec. nos quedaría

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}} \quad (1)$$




donde $\ddot{\vec{R}} = a_0\hat{\imath}$, así que necesitamos pasarlo al SRNI

$$\Rightarrow \hat{\imath} = -\sin\theta\hat{\rho}' - \cos\theta\hat{\theta}' \;\wedge\; \hat{j} = -\cos\theta\hat{\rho}' + \sin\theta\hat{\theta}'$$

Y las fuerzas reales actuando sobre la masa son: la tensión de la cuerda y el peso

$$m\vec{a} = -mg\hat{j} - T\hat{\rho}'$$

$$= -mg(-\cos\theta\hat{\rho}' + \sin\theta\hat{\theta}') - T\hat{\rho}'$$

reemplazando en (1)

$$\Rightarrow m(-L\dot{\theta}^2\hat{\rho}' + L\ddot{\theta}\hat{\theta}') = mg\cos\theta\hat{\rho}' - mg\sin\theta\hat{\theta}' - T\hat{\rho}' - ma_0(-\sin\theta\hat{\rho}' - \cos\theta\hat{\theta}')$$

$$\hat{\rho}')\quad -mL\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T + ma_0\sin\theta$$

$$\hat{\theta}')\quad mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + ma_0\cos\theta$$

Integramos $\hat{\theta}')$ $\Rightarrow mL\int_0^\theta \ddot{\theta}\,d\theta = -mg\int_0^\theta \sin\theta\,d\theta + ma_0\int_0^\theta \cos\theta\,d\theta$

$$\Leftrightarrow mL\frac{\dot{\theta}^2}{2} = mg\cos\theta\Big|_0^\theta + ma_0\sin\theta\Big|_0^\theta$$

$$\Leftrightarrow mL\frac{\dot{\theta}^2}{2} = mg(\cos\theta - 1) + ma_0\sin\theta \quad (2)$$

El ángulo máximo lo tenemos para $\dot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow mg(\cos\theta^* - 1) + ma_0\sin\theta^* = 0$$

$$\Leftrightarrow mg\cos\theta^* + ma_0\sin\theta^* = mg$$

$$\Leftrightarrow -\cos\theta^* = \frac{a_0\sin\theta^*}{g} - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta^* = \frac{a_0^2\sin^2\theta^*}{g^2} - \frac{2a_0\sin\theta^*}{g} + 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1} - \sin^2\theta^* = \frac{a_0^2}{g^2}\sin^2\theta^* - \frac{2a_0}{g}\sin\theta^* + \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sin^2\theta^*\left(\frac{a_0^2}{g^2} + 1\right) - \frac{2a_0\sin\theta^*}{g}$$

$$0 = \sin\theta^*\left(\sin\theta^*\left(\frac{a_0^2}{g^2} + 1\right) - \frac{2a_0}{g}\right) \quad / \text{no consideramos } \theta^* = 0 \text{ (C.I.)}$$

$$\Rightarrow \frac{2a_0}{g} = \sin\theta^*\left(\frac{a_0^2}{g^2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta^* = \arcsin\left(\frac{2a_0}{g}\left(\frac{a_0^2}{g^2} + 1\right)^{-1}\right)$$

b) De $\hat{\rho}')$ despejamos la tensión $\Rightarrow T = mL\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + ma_0\sin\theta$, donde podemos usar $\dot{\theta}(\theta)$ de (2)

$$\Rightarrow T = mL\left(\frac{2g}{L}(\cos\theta - 1) + \frac{2a_\circ}{L}\sin\theta\right) + mg\cos\theta + ma_\circ\sin\theta$$

$$= -2mg + \cos\theta\,(2mg + mg) + \sin\theta\,(2ma_\circ + ma_\circ)$$

$$= -2mg + 3mg\cos\theta + 3ma_\circ\sin\theta \quad (3)$$

Y para encontrar el máximo de $T(\theta)$ derivamos c/r a $\theta$ e igualamos a 0

$$\Rightarrow \frac{dT}{d\theta} = -3mg\sin\tilde{\theta} + 3ma_\circ\cos\tilde{\theta} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \tan(\hat{\theta}) = \frac{g}{a} \Leftrightarrow \tilde{\theta} = \arctan\left(\frac{g}{a}\right)$$

donde $\hat{\theta}$ es el ángulo donde se maximiza $T$, reemplazamos en (3)

$$\Rightarrow T = -2mg + 3mg\cos\left(\arctan\left(\frac{g}{a_\circ}\right)\right) + 3ma_\circ\sin\left(\arctan\left(\frac{g}{a_\circ}\right)\right)$$

Recuerda que está la grabación de la clase!!