Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 15

Pequeñas oscilaciones III

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.- Torque, energía y pequeñas oscilaciones

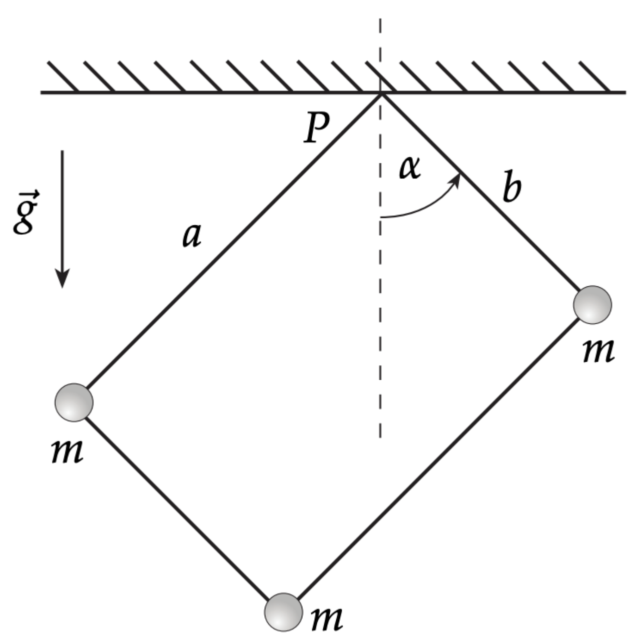
Tres partículas de masa m están en los vértices de un rectángulo de $a \times b$, formado por varas ideales de masa despreciable. El cuarto vértice está fijo a un punto P (ver figura). El rectángulo puede girar en torno a un eje que pasa por P y es perpendicular a la figura. Considere $a = \sqrt{3}\, b$.

a) Usando torque y momentum angular calcule la ecuación de movimiento para el ángulo con respecto a la vertical ϕ (en la figura es α)

b) Usando a) calcule el punto de equilibrio del sistema y usando expansión en serie de Taylor encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a este punto de equilibrio

c) Para comprobar su resultado anterior, exprese en función de ϕ la energía potencial del sistema y con esta calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones

d) Encuentre la expresión, en función de ϕ y $\dot{\phi}$, de la fuerza que ejerce el pivote P



Formulario

Puntos de equilibrio

De tener únicamente fuerzas conservativas (o que las no conservativas no ejerzan trabajo), los puntos de equilibrio r_0 cumplen que

$$\left.\frac{\partial U_{\text{tot}}(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0.$$

Estos puntos pueden ser equilibrios estables o inestables según el signo de la segunda derivada

$$\left.\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} > 0 \quad (\text{estable})\,; \qquad \left.\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} < 0 \quad (\text{inestable})\,,$$

donde U_{tot} está en función de la coordenada r y es el potencial total del sistema, o sea

$$U_{\text{tot}}(r) = \sum_i U_i(r)\,.$$

Si la energía puede ser escrita en función de una sola variable, en este caso r, la frecuencia de oscilación en torno a los puntos de equilibrio **estables** está dada por

$$\omega = \sqrt{\left.\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} \frac{1}{m}}\,.$$

Centro de masa

En un sistema de partículas el centro de masa, CM, se calcula como

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i,$$

donde M_{tot} es la suma de todas las masas, y m_i y $\vec{r}_i$ la masa y la posición de la i-ésima partícula del sistema.
Se puede calcular la ecuación de movimiento del CM con una fórmula idéntica al caso de una sola partícula

$$M_{\text{tot}} \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}},$$

donde $\vec{F}_j^{\text{ext}}$ es la j-ésima fuerza **externa** que actúa sobre el sistema.

Serie de Taylor

La frecuencia de pequeñas oscilaciones también se puede encontrar para problemas más generales (por ej. considerando fuerzas disipativas). Primero debemos encontrar la ecuación de movimiento, que en general sería algo como:

$$\ddot{q} - \frac{1}{\alpha} F_{\mathrm{tot}}(q) = 0.$$

Ahora, consideramos una pequeña oscilación de la forma $q(t) = q_0 + \delta q(t)$, donde q_0 es el punto de equilibrio y $\delta q(t) \ll 1 \ \forall t$, así que podemos expandir en serie de Taylor la fuerza total de la siguiente forma:

$$F_{\mathrm{tot}}(q = q_0 + \delta q(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k F_{\mathrm{tot}}(q)}{\mathrm{d}q^k}\Big|_{q=q_0} (\delta q(t))^k,$$

donde por definición de punto de equilibrio, $\ddot{q} = 0$ en $q = q_0$, tenemos que $F_{\mathrm{tot}}(q_0) = 0$. Y como $\delta q \ll 1$, nos podemos quedar hasta primer orden en la expansión, así que obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\delta q} - \frac{1}{\alpha} \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}q}\Big|_{q=q_0} \delta q = 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{\delta q} + \omega^2 \delta q = 0 \end{aligned}$$

que es una EoM para la perturbación δq y que a este orden tiene la expresión de un MAS, con frecuencia:

$$\omega^2 := -\frac{1}{\alpha} \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}q}\Big|_{q=q_0}.$$

Debido a que $\vec{F} = -\nabla U$, en nuestro caso tendríamos

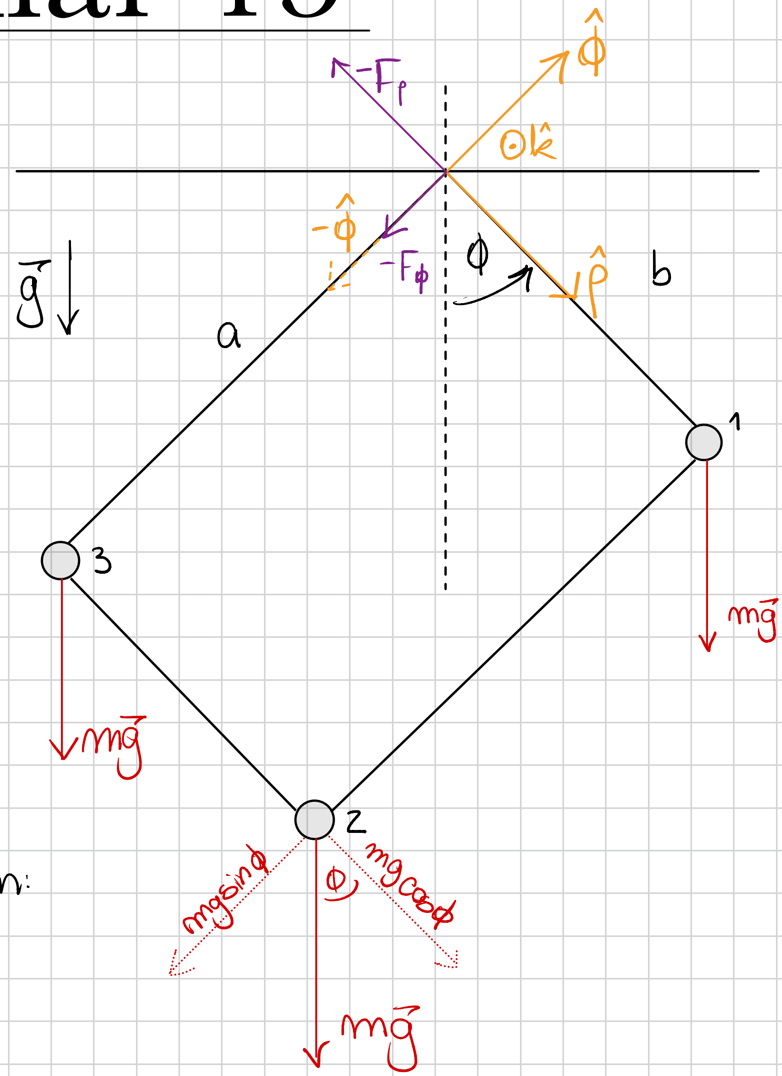
$$-\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}q}\Big|_{q=q_0} = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}q^2}\Big|_{q=q_0},$$

así que recuperamos la fórmula conocida

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}q^2}\Big|_{q=q_0}.$$

Auxiliar 15

P1



a) Queremos ocupar la relación

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{\tau}_{tot}^{\,ext}, \qquad (1)$$

primero definamos las posiciones de las partículas. Utilizando el sistema dibujado, $\{\hat\rho, \hat\phi, \hat k\}$, tenemos

- $\vec r_1 = b\hat\rho$
- $\vec r_2 = b\hat\rho - a\hat\phi$
- $\vec r_3 = -a\hat\phi$

por lo que sus velocidades (derivando) son:

- $\vec v_1 = b\dot\phi\hat\phi$
- $\vec v_2 = b\dot\phi\hat\phi + a\dot\phi\hat\rho$
- $\vec v_3 = a\dot\phi\hat\rho$

Ahora, calculemos el momentum angular de cada partícula, $\vec L_i$, ocupando

$$\vec L_i = m_i \vec r_i \times \vec v_i, \quad m_i = m \ \forall i$$

- $\vec L_1 = mb\hat\rho \times (b\dot\phi\hat\phi) = mb^2\dot\phi\hat k$
- $\vec L_2 = m(b\hat\rho - a\hat\phi)\times(b\dot\phi\hat\phi + a\dot\phi\hat\rho) = mb^2\dot\phi\hat k + ma^2\dot\phi\hat k$
- $\vec L_3 = -ma\hat\phi \times (a\dot\phi\hat\rho) = ma^2\dot\phi\hat k$

por lo que el momt. ang. total sería

$$\vec L_{tot} = 2m(a^2+b^2)\dot\phi\hat k \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec L_{tot}}{dt} = 2m(a^2+b^2)\ddot\phi\hat k}$$

Nos faltaría calcular los torques $\vec\tau_i^{\,ext}$ sobre cada partícula.

Para ocupar (1) solo consideramos fuerzas externas, que en este caso sería la fuerza peso, que para las tres partículas se descompone como

$$m\vec{g} = mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}.$$

Ocupando

$$\vec{\tau}_i^{\,ext} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,tot,ext}$$

obtenemos

- $\vec{\tau}_1^{\,ext} = b\hat{\rho} \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = -mgb\sin\phi\,\hat{k}$
- $\vec{\tau}_2^{\,ext} = (b\hat{\rho} - a\hat{\phi}) \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = -mgb\sin\phi\,\hat{k} + mga\cos\phi\,\hat{k}$
- $\vec{\tau}_3^{\,ext} = -a\hat{\phi} \times (mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) = mga\cos\phi\,\hat{k}$

así que el torque externo total sería

$$\vec{\tau}_{tot}^{\,ext} = \sum_{i=1}^{3} \vec{\tau}_i^{\,ext} = \boxed{2mg(a\cos\phi - b\sin\phi)\hat{k}}$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{\tau}_{tot}^{\,ext} \iff 2m(a^2+b^2)\ddot{\phi} = 2mg(a\cos\phi - b\sin\phi)$$

$$\iff \boxed{\ddot{\phi} + \frac{g}{a^2+b^2}(b\sin\phi - a\cos\phi) = 0} \quad (2)$$

b) Los puntos de equilibrio se dan donde la aceleración es 0, así que de (2) imponemos $\ddot{\phi} \overset{!}{=} 0$ en ϕ_0

$$b\sin\phi_0 - a\cos\phi_0 \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \phi_0 = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

donde usamos $a = \sqrt{3}b$ (se me olvidó ponerlo en el enunciado). Ahora consideraremos pequeñas oscilaciones como

$$\phi(t) = \phi_0 + \delta\phi(t), \quad \text{con } |\delta\phi(t)| \ll 1 \quad \forall t$$

Expandamos en Taylor el segundo término de (2)

- $\cos(\phi = \phi_0 + \delta\phi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left.\frac{d^k \cos\phi}{d\phi^k}\right|_{\phi=\phi_0} (\delta\phi)^k = \cos(\phi_0) - \sin(\phi_0)\,\delta\phi + \cancel{\mathcal{O}(\delta\phi^2)}^{\sim 0}$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\delta\phi$$

- $\sin(\phi = \phi_0 + \delta\phi) = \sin(\phi_0) + \cos(\phi_0)\,\delta\phi + \cancel{O(\delta\phi^2)}^{\sim 0}$

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\delta\phi$$

Reemplazando en (2), con $\ddot{\phi} = \delta\ddot{\phi}$, obtenemos

$$\delta\ddot{\phi} + \frac{g}{4b^2}\left[b\left(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}\,\delta\phi\right) - \sqrt{3}\,b\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\delta\phi\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta\ddot{\phi} + \frac{g}{2b}\,\delta\phi = 0$$

que es la ec. de un M.A.S., donde identificamos la frecuencia de oscilación

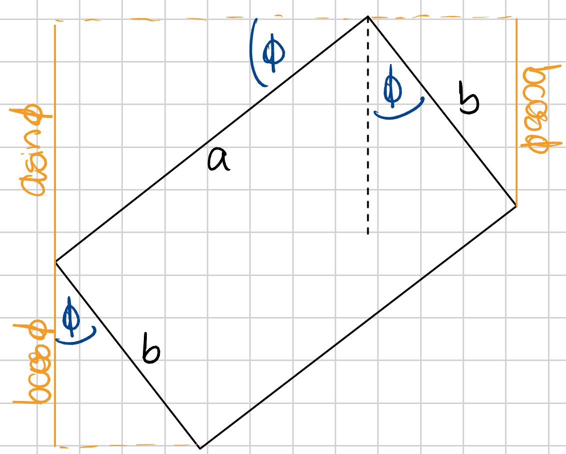
$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{2b}}$$

c) Ahora hagámoslo con energía mecánica (que se conserva)

$$K = \sum_{i=1}^{3} K_i = \frac{1}{2} m\left(2b^2\dot{\phi}^2 + 2a^2\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{2} m\, 8b^2\dot{\phi}^2 \quad (3)$$

y la energía potencial es

$$U = \sum_{i=1}^{3} U_i = mg\,(z_1 + z_2 + z_3)$$



donde

- $z_1 = -b\cos\phi$
- $z_2 = -a\sin\phi - b\cos\phi$
- $z_3 = -a\sin\phi$

$$\Rightarrow U = -2mg\,(a\sin\phi + b\cos\phi)$$

que al derivar 2 veces

$$\left.\frac{d^2U}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} = -2mg\,(-a\sin\phi_0 - b\cos\phi_0) = 4mgb$$

y por la forma de (3) sabemos que

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha}\left.\frac{d^2U(\phi)}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} = \frac{1}{8mb^2}\,4mgb = \frac{g}{2b}$$

d) Para la fuerza del pivote ocupemos

$$M_{tot}\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}^{ext}_{tot} \quad (4)$$

donde $M_{tot} = \sum_{i=1}^{3} m_i = 3m$ y $\vec{R}_{CM}$ se calcula como

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M_{tot}}\sum_{i=1}^{3} m_i\vec{r}_i = \frac{1}{3}(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3)$$

$$= \frac{2}{3}(b\hat{\rho} - a\hat{\phi})$$

que tenemos que derivar dos veces

$$\dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{2}{3}(b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{\rho}) \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = \frac{2}{3}(b\ddot{\phi}\hat{\phi} - b\dot{\phi}^2\hat{\rho} + a\ddot{\phi}\hat{\rho} + a\dot{\phi}^2\hat{\phi})$$

$$= \frac{2}{3}[(a\ddot{\phi} - b\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (b\ddot{\phi} + a\dot{\phi}^2)\hat{\phi}]$$

Las fuerzas externas son: los tres peso y la fuerza de pivote

- $\vec{F}_{mg} = 3m\vec{g} = 3(mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi})$
- $\vec{F}_{piv} = F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi}$

así que (4) sería como

$$2m[(a\ddot{\phi} - b\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (b\ddot{\phi} + a\dot{\phi}^2)\hat{\phi}] = 3(mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}) + F_\rho\hat{\rho} + F_\phi\hat{\phi}$$

y las EoMs escalares:

$\hat{\rho}$) $2mb(\sqrt{3}\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2) = 3mg\cos\phi + F_\rho$

$\hat{\phi}$) $2mb(\ddot{\phi} + \sqrt{3}\dot{\phi}^2) = -3mg\sin\phi + F_\phi$

donde si usamos la EoM de $\ddot{\phi}$, Ec. (2), obtenemos F_ρ y F_ϕ en función de ϕ y $\dot{\phi}$