

# Auxiliar 15

## Pequeñas oscilaciones II

**Profesor: Gonzalo Palma**

Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi

Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

**P1.-**

Usted se encuentra balanceándose en uno de los columpios de la plaza Manuel Rodríguez. Usando sus piernas usted realiza un balanceo que le genera una fuerza tangencial a su movimiento y de forma sinusoidal dependiente del tiempo, como

$$\vec{F}_0 = F_0 \sin \omega t \hat{\phi}.$$

Además, el aire le genera una fuerza de roce viscoso de la forma  $\vec{F}_r = -c\vec{v}$ , donde  $\vec{v}$  es la velocidad que usted lleva en el columpio. Considere que el columpio tiene un largo  $R$  y masa despreciable y usted tienen una masa  $m$ , con esto encuentre la ecuación de movimiento linealizada que rige su balanceo. Esta ecuación la resolverán en clases.

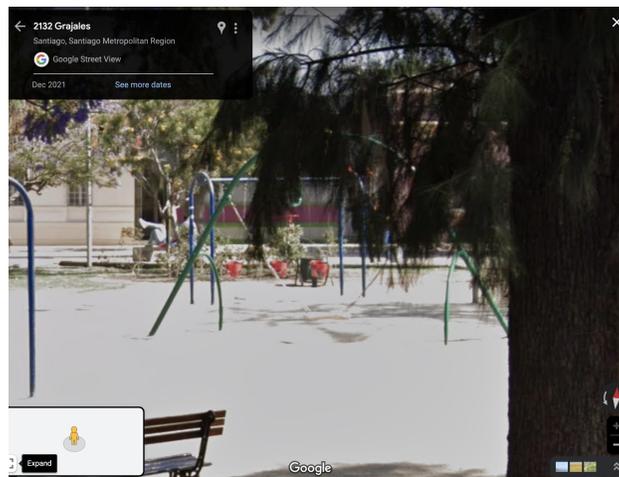


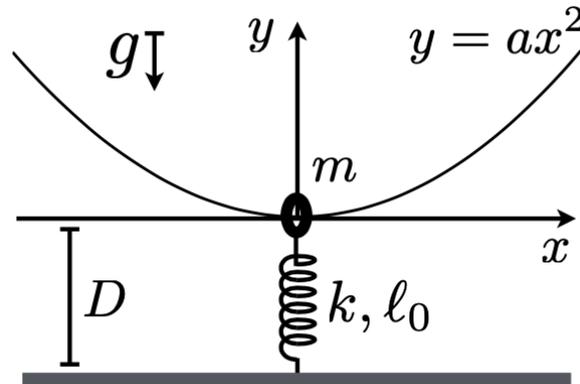
Figura 1: Imagínese ahí

**P2.- P3 C2 2015**

Considere un alambre que describe una curva parabólica del tipo  $y = ax^2$  en un plano vertical. Un anillo de masa  $m$  desliza con roce despreciable por el alambre, unido a un resorte de largo  $l_0$  y constante elástica  $k$ . El otro extremo del resorte se encuentra atado a un punto fijo localizado a

una distancia  $D$  del punto  $(0, 0)$  del sistema de coordenadas  $(x, y)$  (ver figura). Asuma  $a = 1/l_0$  y  $D = 2l_0$ .

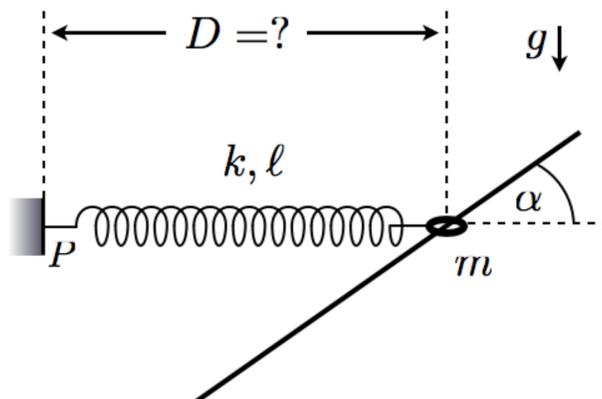
- Si el anillo se encuentra inicialmente en el punto más bajo de la parábola, determine la velocidad  $v_0$  con que se le debe impulsar para que alcance una altura  $D$  sobre la posición inicial
- Demuestre que el punto  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio estable
- Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del anillo alrededor del punto de equilibrio



**P3.- P1 C3 2010**

El anillo de masa  $m$  de la figura se puede deslizar sin roce por una barra inclinada formando un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal. El anillo está ligado a un punto fijo  $P$  mediante un resorte ideal de largo natural  $l$  y constante elástica  $k$ . Se pide:

- Determinar la distancia  $D$  para que la posición con el resorte horizontal corresponda a un punto de equilibrio del sistema (ver figura)
- Si se cumple que  $\alpha = 30^\circ$  y  $kl = mg$ , determine el tipo de estabilidad del equilibrio de la parte (a). Si fuese estable, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a él. Si fuese inestable, indique si espera que existan equilibrios adicionales.



# Formulario

## Puntos de equilibrio

De tener únicamente fuerzas conservativas (o que las no conservativas no generen trabajo), los puntos de equilibrio  $r_0$  cumplen que

$$\left. \frac{\partial U_{\text{tot}}(r)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0,$$

estos puntos pueden ser equilibrios estables o inestables según el signo de la segunda derivada

$$\left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} > 0 \quad (\text{estable}); \quad \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} < 0 \quad (\text{inestable}),$$

donde  $U_{\text{tot}}$  está en función de la coordenada  $r$  y es el potencial total del sistema, o sea

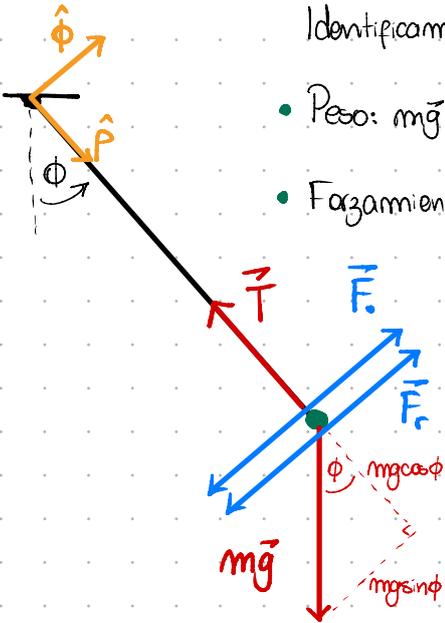
$$U_{\text{tot}}(r) = \sum_i U_i(r).$$

Si la energía puede ser escrita en función de una sola variable, en este caso  $r$ , la frecuencia de oscilación en torno a los puntos de equilibrio **estables** está dada por

$$\omega = \sqrt{\left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} \frac{1}{m}}.$$

# Auxiliar 15

## P1



Identificamos las fuerzas de nuestro problema

- Peso:  $m\vec{g} = mg\cos\phi\hat{r} - mg\sin\phi\hat{\phi}$
- Forzamiento:  $\vec{F}_0 = F_0\sin(\omega t)\hat{\phi}$

- Rozo viscoso:  $\vec{F}_r = -c\vec{v} = -c(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) = -cR\dot{\phi}\hat{\phi}$

- Tensión:  $\vec{T} = -T\hat{r}$

Así que la ec de mov. vectorial, ocupando coord. polares, sería:

$$m((\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}) = mg\cos\phi\hat{r} - mg\sin\phi\hat{\phi} + F_0\sin(\omega t)\hat{\phi} - cR\dot{\phi}\hat{\phi} - T\hat{r}$$

y las ecs. de mov. escalares serían

$$\hat{r}) \quad -mR\dot{\phi}^2 = mg\cos\phi - T$$

$$\hat{\phi}) \quad mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi + F_0\sin(\omega t) - cR\dot{\phi}$$

donde en  $\hat{\phi}$  tenemos casi una EDO lineal, a excepción del  $\sin\phi$ , pero si consideramos pequeñas oscilaciones en torno a la vertical, o sea  $\phi \ll 1 \Rightarrow \sin\phi \approx \phi$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{c}{m}\dot{\phi} + \frac{g}{R}\phi = \frac{F_0}{mR}\sin(\omega t)$$

con lo que conseguimos la EDO de nuestro balanceo y que podemos resolver.

# P2

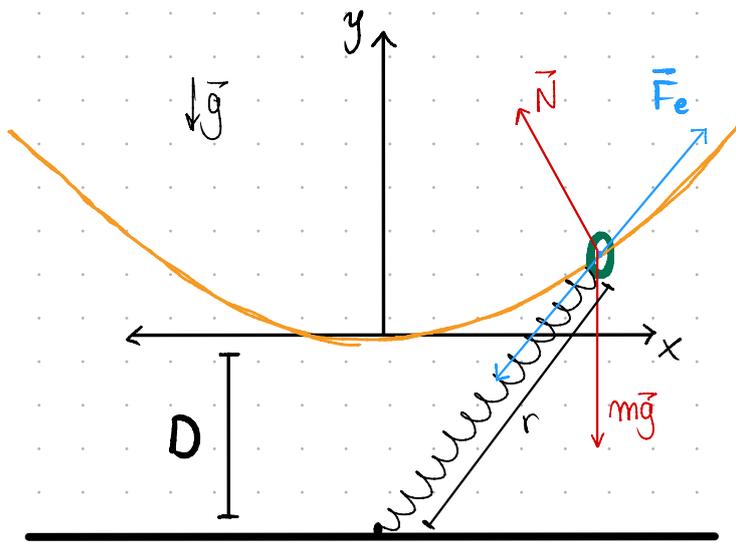


Figura 1: Problema

Primero identificamos las fuerzas

- Elástica: Conservativa
- Peso: Conservativa
- Normal: No conservativa, pero no ejerce trabajo.

Por lo tanto se conserva la energía mecánica, donde tendremos dos energías potenciales.

Calculemos la distancia del origen del resorte a la partícula para poder escribir la potencial elástica

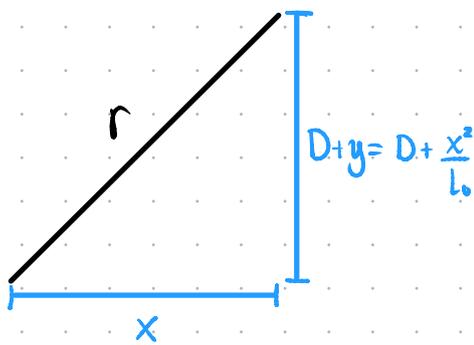


Fig 2: Expresión de r

Por Fig 2. tenemos

$$r^2 = x^2 + \left(D + \frac{x^2}{l}\right)^2 \quad \text{usando } D = 2l$$

$$r^2 = \frac{x^4}{l^2} + 5x^2 + 4l^2$$

por lo que la potencial elástica sería

$$U_e = \frac{1}{2} k (r - l)^2 = \frac{1}{2} k \left( \sqrt{\frac{x^4}{l^2} + 5x^2 + 4l^2} - l \right)^2$$

mientras que la potencial gravitatoria sería  $U_p = mgz = mg \frac{x^2}{l}$

Así que la energía mecánica, que se conserva, sería

$$E = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + U_e(x) + U_p(x), \text{ usando cartesianas.}$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} k \left( \sqrt{\frac{x^4}{l^2} + 5x^2 + 4l^2} - l \right)^2 + \frac{mg}{l} x^2 \quad (1)$$

a) Ocupemos que  $E_o = E_f$  donde  $E_o$  es la energía en el momento inicial, en el cual

$$\square x_o = y_o = 0 \quad \text{y} \quad |\vec{v}_o| = v_o$$

mientras que  $E_f$  es en el tiempo "final" donde la partícula debe detenerse (al ser la altura máxima) al alcanzar una altura  $D$

$$\square y_f = D = 2l \Rightarrow x_f = \sqrt{2l^2} \quad \text{y} \quad |\vec{v}_f| = 0$$

reemplazando en (1).

$$E_o = E_f$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} k (\sqrt{4l_o^2} - l_o)^2 = \frac{1}{2} k \left( \sqrt{\frac{4l_o^4}{l_o^2} + 10l_o^2 + 4l_o^2} - l_o \right)^2 + \frac{mg}{l_o} 2l_o^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} k l_o^2 = \frac{1}{2} k (l_o \sqrt{18} - l_o)^2 + 2mg l_o$$

$$\Rightarrow v_o = \left( \frac{k l_o^2 (\sqrt{18} - 1)^2 + 2mg l_o - \frac{1}{2} k l_o^2}{m} \right)^{1/2}$$

b) Tenemos que el potencial total es

$$U_{tot} = U_e + U_p = \frac{1}{2} k \left( \sqrt{\frac{x^4}{l_o^2} + 5x^2 + 4l_o^2} - l_o \right)^2 + \frac{mg}{l_o} x^2$$

para identificar puntos de equilibrio derivamos con respecto a la coordenada

$$\frac{\partial U_{tot}(x)}{\partial x} = k \left( \sqrt{\frac{x^4}{l_o^2} + 5x^2 + 4l_o^2} - l_o \right) \frac{4x^3/l_o^2 + 10x}{(x^4/l_o^2 + 5x^2 + 4l_o^2)^{1/2}} \frac{1}{2} + \frac{2mg}{l_o} x$$

y notamos que evaluando en  $x=0 \Rightarrow \left. \frac{\partial U_{tot}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ , así que  $(0,0)$  es punto de equilibrio

$$\frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2} = \frac{2mg}{l_o} + k \frac{4x^3/l_o^2 + 10x}{(x^4/l_o^2 + 5x^2 + 4l_o^2)^{1/2}} \frac{4x^3/l_o^2 + 10x}{(x^4/l_o^2 + 5x^2 + 4l_o^2)^{1/2}} \frac{1}{4}$$

$$+ k \left( \sqrt{\frac{x^4}{l_o^2} + 5x^2 + 4l_o^2} - l_o \right) \left[ \frac{(12x^2/l_o^2 + 10)(x^4/l_o^2 + 5x^2 + 4l_o^2)^{-1/2}}{(x^4/l_o^2 + 5x^2 + 4l_o^2)^{1/2}} - \frac{(4x^3/l_o^2 + 10x)}{(x^4/l_o^2 + 5x^2 + 4l_o^2)^{1/2}} \frac{(4x^3/l_o^2 + 10x)}{2} \right]$$

$$\times \frac{1}{x^4/l_o^2 + 5x^2 + 4l_o^2} \frac{1}{2}$$

evaluando en  $x=0$  esta segunda derivada

$$\left. \frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \frac{2mg}{l_o} + k l_o \left[ \frac{10 \cdot 2l_o}{4l_o^2 \cdot 2} \right] = \frac{2mg}{l_o} + \frac{5k}{2} > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ es equilibrio estable}$$

c) Como nuestra energía es de la forma  $E = \frac{1}{2} m v^2 + U$ , la frecuencia de pequeñas oscilaciones es

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_o)}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l_o} + \frac{5k}{2m}}$$

# P3

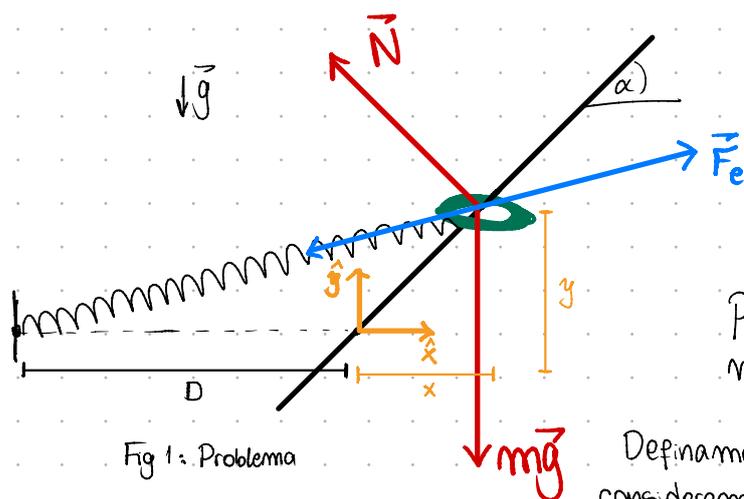


Fig 1: Problema

Identificamos las fuerzas

▷ Elástica: Conservativa

▷ Peso: Conservativa

▷ Normal: No conservativa, pero no ejerce trabajo

Por lo tanto se conserva la energía mecánica, donde tendríamos dos energías potenciales.

Definamos  $r$  como la distancia entre el punto P y la partícula, además consideremos la altura como 0 a la altura del punto P.

La posición  $y$  está dada por la posición en  $x$ , de la forma  $y = \tan(\alpha) \cdot x$ , por lo que  $r$  estaría dado por

$$\Rightarrow r^2 = (D+x)^2 + y^2 = D^2 + 2Dx + x^2 + \tan^2(\alpha) x^2 = D^2 + 2Dx + \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}$$

así que la energía mecánica sería

$$E = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + U_e + U_p = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + \frac{1}{2} k (r-l)^2 + mgy$$

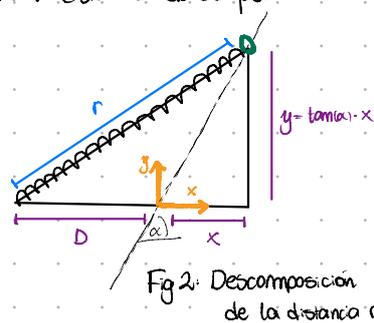


Fig 2: Descomposición de la distancia  $r$

$$= \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + \frac{1}{2} k \left( \sqrt{D^2 + 2Dx + \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}} - l \right)^2 + mg \tan \alpha \cdot x$$

a) Como queremos encontrar pts. de equilibrio, derivamos

$$\frac{\partial U_{tot}(x)}{\partial x} = \frac{\partial U_e(x)}{\partial x} + \frac{\partial U_p(x)}{\partial x} = k \left( \sqrt{D^2 + 2Dx + \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}} - l \right) \frac{2D + 2x/\cos^2 \alpha}{\left( D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2 \alpha \right)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} + mg \tan \alpha$$

$$\text{Evaluando en } x=0 \Rightarrow \left. \frac{\partial U_{tot}}{\partial x} \right|_{x=0} = k(D-l) \frac{D}{D^3} + mg \tan \alpha = kD - kl + mg \tan \alpha$$

como queremos que sea un punto de equilibrio, imponemos  $U'(x=D) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow D = l - \frac{mg \tan \alpha}{k}$$

b) Para determinar el tipo de equilibrio, calculamos la segunda derivada del potencial

$$\frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2} = k \frac{(2D + 2x/\cos^2 \alpha)^2}{D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{4} + k \left( \sqrt{D^2 + 2Dx + \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}} - l \right) \left[ \frac{2/\cos^2 \alpha (D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2 \alpha)^{-3/2}}{\left( D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2 \alpha \right)^{3/2}} - \frac{(2D + 2x/\cos^2 \alpha)^2}{\left( D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2 \alpha \right)^2} \right] \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

evaluando esto en  $x=0$  (nuestro pto. de equilibrio)

$$\left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = k \cdot \frac{D^2}{D^2} + k(D-l) \left[ \frac{2D}{\cos^2 \alpha} - \frac{2D^2}{D} \right] \frac{1}{2D^2}$$

$$= k + \frac{k(D-l)}{D} \left[ \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right]$$

$$= k + \left( k - \frac{kl}{l - mg \tan(\alpha)/k} \right) \left[ \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right], \text{ usando que } \cos^2(30^\circ) = \frac{3}{4}, \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \wedge mg = kl$$

$$= k + \left( k - \frac{kl}{l - kl\sqrt{3}/3k} \right) \left[ \frac{4}{3} - 1 \right]$$

$$= k + k \left( 1 - \frac{1}{1 - \sqrt{3}/3} \right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$= k - k \frac{\sqrt{3}/3}{1 - \sqrt{3}/3} \cdot \frac{1}{3} \approx 0.54 \cdot k > 0$$

• Cuando  $\alpha = 30^\circ$  y  $mg = kl$ ,  $x=0$  es un pto de equilibrio estable