Auxiliar 15 Preparación C2

Energía, momentum angular y pequeñas oscilaciones

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

P1.- **[P1 C2 2020 Aceituno]**

Una partícula de masa m se encuentra en un campo de fuerza de atracción cuya magnitud es proporcional a la distancia al punto de atracción ($\vec{F} = -k\vec{\rho}$). En un cierto instante la partícula se libera desde el reposo en una posición a una distancia ρ_0 del punto de atracción (ver figura adjunta). Cuando la partícula ha recorrido la mitad de esa distancia y su rapidez es v_1 (se pide calcularla) recibe un impulxso perpendicular a la trayectoria que le da una componente de velocidad $v_2 = v_1/\sqrt{3}$ en esa dirección.

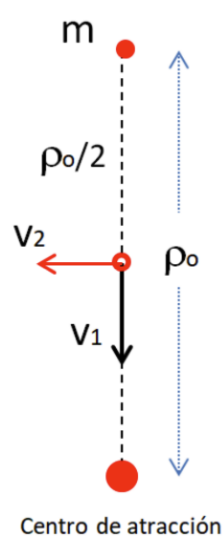


Figura 1: P1

a) Determine el valor de v_1.

b) Encuentre la rapidez máxima v_{max} y la menor distancia ρ_{min} que la partícula alcanza del centro de atracción en el movimiento posterior al impulso que cambió su trayectoria rectilínea, en función de m, k y ρ_0.

P2.- [**P2 C2 2015-2 Muñoz**]

Un anillo de masa m deliza con roce desprciable inserto en un aro circular de radio R colocado en posición horizontal. El anillo está unido al extremo de un resorte ideal de constante elástica k y largo natural $l_0 = \beta R$, con $\beta > 0$. EL otro extremo del resorte está fijo en un punto O ubicado verticalmente osbre el punto P del aro a una distancia R sobre este.

a) Encuentre las posiciones de equilibrio del anillo. Indique para qué valores de β existen equilibrios fuera del eje de simetría PQ.

b) Determine el rango de valores de β en que

   i) P es eq. estable y Q es eq. inestable

   i) P es eq. inestable y Q es eq. estable

c) Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a P para el caso b).i)

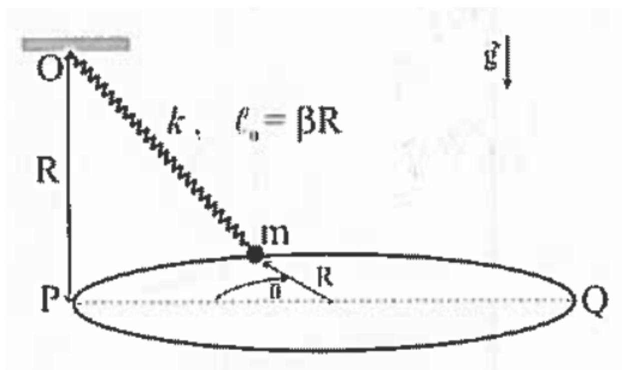


Figura 2: P2

P3.- [**P3 C2 2003 Muñoz**] Semi-propuesto

Para el anillo de la figura indique la o las condiciones de los parámetros m, l_0, k, D para que la posición mostrada sea un punto de equilibrio estable. En tal caso determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a él.

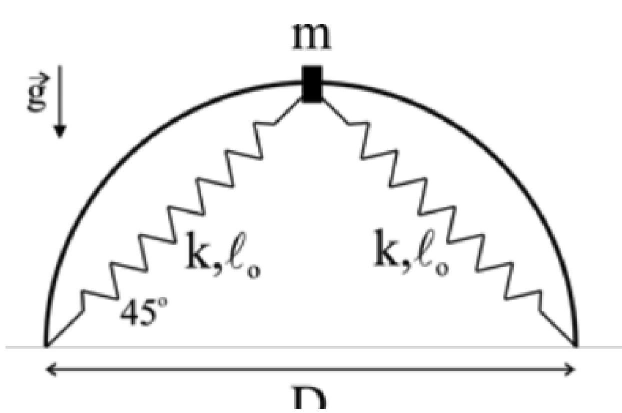


Figura 3: P3

Auxiliar 15

P1

Separamos el problema en 2 momentos, antes y después del impulso, en ambos casos solo existe la fuerza central (por lo tanto conservativa)

$$\vec{F} = -k\rho\hat{\rho} \text{ , calculamos su energía potencial asociada}$$

$$\Rightarrow U = -\int^{\rho} -k\rho' d\rho' = \frac{k\rho^2}{2} + U_0$$

donde podemos elegir la const. de integración $U_0 = 0$

$$\Rightarrow U(\rho) = \frac{k\rho^2}{2} \quad \Rightarrow E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + \frac{k\rho^2}{2}$$

a) [Primera parte del mov.]

Se conserva la energía mecánica e inicialmente tenemos $\rho_0 = \rho_0$ y $|\vec{v}_0|^2 = 0$ y finalmente (justo antes del impulso), $\rho_f = \rho_0/2$ y $|\vec{v}_f|^2 = v_1^2$

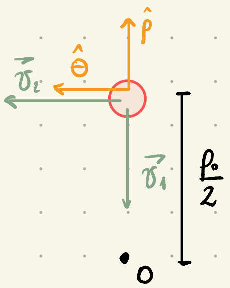
$$E_0 = E_f$$

$$\Leftrightarrow \frac{k\rho_0^2}{2} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{k\rho_0^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow v_1^2 = \frac{2}{m}\cdot\frac{3}{8}k\rho_0^2 = \frac{3}{4}\frac{k}{m}\rho_0^2$$

b) [Segunda parte del mov.]

En el mov. anterior tuvimos un movimiento en línea recta (en la dirección $-\hat{\rho}$), ya que a la partícula no se le había impartido ninguna velocidad en $\hat{\theta}$, ahora si.
Tendríamos que la velocidad inicial de esta parte del mov. es



$$\vec{v}_0 = -v_1\hat{\rho} + v_2\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_0|^2 = v_1^2 + v_2^2 \text{, y por conservación de la energía}$$

$$E = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) + \frac{k\rho_0^2}{8} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + \frac{k\rho^2}{2}$$

Al igual que en el Ejercicio 3, la velocidad máxima se tiene cuando se minimiza la energía potencial y esto se da cuando la partícula no se puede acercar más al centro de atracción, o sea $\dot{\rho} = 0$ *

Explicación abajo

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) + \frac{k\rho_0^2}{8} = \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{k\rho^2}{2}$$

Para conseguir una expresión de $\dot{\theta}$ ocupamos conservación del momentum angular

$$\rho^2\dot{\theta} = \rho_{ini}^2\dot{\theta}_{ini} = \underbrace{\rho_{ini}}_{\rho_0/2}\underbrace{\rho_{ini}\dot{\theta}_{ini}}_{v_2} = \frac{\rho_0}{2}v_2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\rho_0^2 v_2^2}{4}\frac{1}{\rho^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2) + \frac{k\rho_0^2}{8} = \frac{1}{2}m\frac{\rho_0^2 v_2^2}{4}\frac{1}{\rho^2} + \frac{k\rho^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{k}{2}\rho^4 - \left[\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2) + \frac{k\rho_0^2}{8}\right]\rho^2 + \frac{1}{8}m\rho_0^2 v_2^2$$

hacemos el c.v. $x=\rho^2 \Rightarrow 0 = \frac{k}{2}x^2 - \left[\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2) + \frac{k\rho_0^2}{8}\right]x + \frac{1}{8}m\rho_0^2 v_2^2$

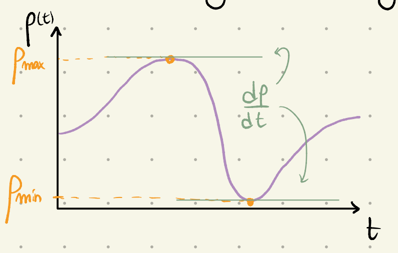
$$\Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \rho_{1,2}^2$$

donde tendríamos que $\rho_1^2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \rho_{max}^2$ y $\rho_2^2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \rho_{min}^2$ (el que buscamos)

$$\Rightarrow v_{máx} = \rho_{mín}\dot{\theta}(\rho=\rho_{mín})$$
$$= \frac{\rho_0 v_2}{2}\frac{1}{\rho_{mín}}$$

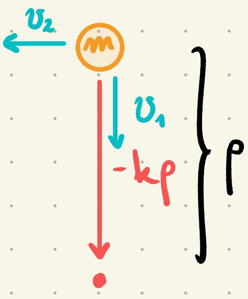
* Se tiene eso, ya que un gráfico de ρ vs t sería de forma general



Donde vemos que para maximizar o minimizar ρ, debemos imponer que la pendiente sea nula

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \dot{\rho}=0$$

P1 con Newton



Aunque al comienzo es un movimiento unidimensional, usaremos un sist. de coord. polares, ya que solo tenemos una fuerza central, por ende, un mov. en un plano

$$m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta}\right)=-k\overbrace{\rho\hat{\rho}}^{\vec{\rho}}$$, con lo que obtenemos

$\hat{\rho})\ m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)=-k\rho$ (1) ; $\hat{\theta})\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})=0$ (2) conservación

a) Como en la primera parte el movimiento es solo en $\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$, por lo que integramos (1)

(1) → $\ddot{\rho}=-\frac{k}{m}\rho$ / $\int d\rho$ y truco mecánica

$$\int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}}\dot{\rho}\,d\dot{\rho}=-\frac{k}{m}\int_{\rho_0}^{\rho}\rho\,d\rho$$ / por enunciado $\dot{\rho}_0=0 \wedge \rho_0=\rho_0$

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2}=-\frac{k}{2m}(\rho^2-\rho_0^2) \quad (3)$$

Y notamos que $v_1=\dot{\rho}(\rho=\rho_0/2)$, evaluemos en (3)

$$\Rightarrow \frac{\dot{\rho}^2(\rho_0/2)}{2}=-\frac{k}{2m}\left(\frac{\rho_0^2}{4}-\rho_0^2\right)=\frac{k}{2m}\cdot\frac{3}{4}\rho_0^2=\frac{3}{8}\frac{k}{m}\rho_0^2 \Rightarrow v_1=\rho_0\sqrt{\frac{3k}{4m}}$$

b) Luego de aplicada la velocidad v_2, se mantienen las ecs. de movimiento, solo cambian las condiciones iniciales.

Usamos la conservación del momentum angular ((2)) para obtener $\dot{\theta}(\rho)$

(2) → $\rho^2\dot{\theta}=\rho_{ini}^2\dot{\theta}_0=\rho_{ini}v_2 \Leftrightarrow \dot{\theta}=\frac{\rho_0 v_2}{2\rho^2}$, reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow m\left(\ddot{\rho}-\rho\frac{\rho_0^2v_2^2}{4\rho^4}\right)=m\left(\ddot{\rho}-\frac{\rho_0^2v_2^2}{4\rho^3}\right)=-k\rho$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\rho}=\frac{\rho_0^2v_2^2}{4}\frac{1}{\rho^3}-\frac{k}{m}\rho$$ / $\int d\rho$ y truco mecánica

$$\Rightarrow \int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}}\dot{\rho}\,d\dot{\rho}=\frac{\rho_0^2v_2^2}{4}\int_{\rho_0/2}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^3}-\frac{k}{m}\int_{\rho_0/2}^{\rho}\rho\,d\rho$$ / $\dot{\rho}_0=v_1$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}=\frac{\rho_0^2v_2^2}{4}\cdot-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{4}{\rho_0^2}\right)-\frac{k}{2m}\left(\rho^2-\frac{\rho_0^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2(\rho)}{2}=\frac{v_1^2}{2}-\frac{\rho_0^2v_2^2}{8}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{4}{\rho_0^2}\right)-\frac{k}{2m}\left(\rho^2-\frac{\rho_0^2}{4}\right)$$

Con esto podemos calcular la distancia máxima y mínima imponiendo $\dot{\rho}\overset{!}{=}0$, o sea, que la masa deje de alejarse o acercarse respectivamente

$$\dot{\rho}\overset{!}{=}0 \Rightarrow \frac{v_1^2}{2}-\frac{\rho_0^2v_2^2}{8}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{4}{\rho_0^2}\right)-\frac{k}{2m}\left(\rho^2-\frac{\rho_0^2}{4}\right)\overset{!}{=}0$$ / $\cdot\rho^2$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2}\rho^2 - \frac{\rho_0^2 v_2^2}{8}\left(1 - \frac{4}{\rho_0^2}\rho^2\right) - \frac{k}{2m}\left(\rho^4 - \frac{\rho_0^2}{4}\rho^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2m}\rho^4 - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right)\rho^2 + \frac{\rho_0^2 v_2^2}{8} = 0$$

Hacemos el cambio de variable $x = \rho^2$

$$\Rightarrow \frac{k}{2m}x^2 - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right)x + \frac{\rho_0^2 v_2^2}{8} = 0$$

que es una ecuación cuadrática y tiene dos soluciones $x_{+,-}$, donde tomamos x_- que es tomando el signo negativo de la sol. de la ec. cuadrática, luego $\rho_{min} = \sqrt{x_-}$ y por conservación del momentum angular

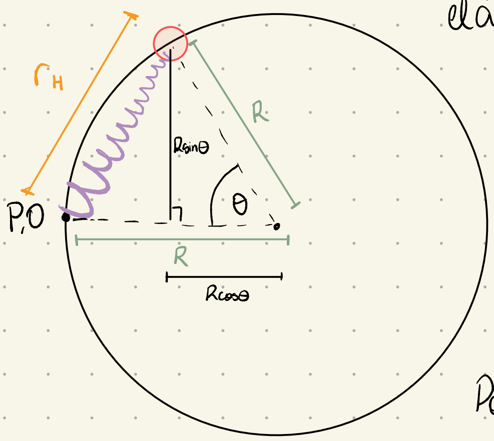
$$v_T = \frac{L}{m\rho}$$

tenemos que si ρ es mínimo, la velocidad es máxima.

* Importante notar la diferencia en la longitud y complejidad del cálculo, en comparación a usar energía

P2

[Vista desde arriba]



Para este problema primero debemos encontrar la distancia desde la partícula al punto O, en función del ángulo θ, para así poder calcular la fuerza elástica.

Por dibujo tenemos que

$$r_H^2 = (R - R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta$$
$$= R^2 - 2R^2\cos\theta + R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta$$
$$= 2R^2 - 2R^2\cos\theta = R^2(2 - 2\cos\theta)$$

Por lo que la distancia r sería

$$r^2 = R^2 + R^2(2 - 2\cos\theta)$$
$$= R^2(3 - 2\cos\theta)$$

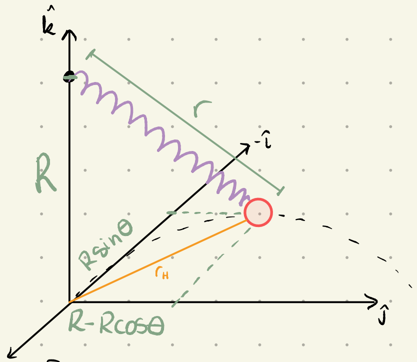
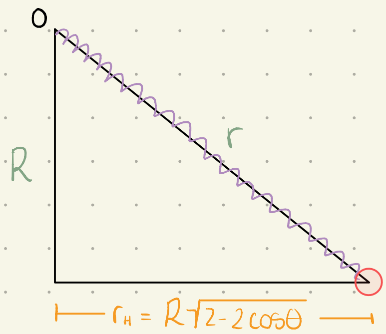


Fig 2: De aquí se ve que $r^2 = R^2 + (R - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2$



Así que la fuerza elástica sería (eligiendo un sist. en esféricas centrado en O)

$$\vec{F} = -k(r - l_0)\hat{r}$$
$$= -k(r - \beta R)\hat{r}$$

Calculamos la energía potencial con $\vec{F} = -\nabla U$

$$\Rightarrow U = -\int^r -k(r - \beta R)\,dr = \frac{k}{2}(r - \beta R)^2$$
$$= \frac{k}{2}\left(R\sqrt{3 - 2\cos\theta} - \beta R\right)^2$$
$$= \frac{kR^2}{2}\left(\sqrt{3 - 2\cos\theta} - \beta\right)^2$$

Ahora, elegimos un sist. coord. polares centrado en el centro del anillo. Expresamos la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}\underbrace{mR^2}_{\alpha}\dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{kR^2}{2}\left(\sqrt{3 - 2\cos\theta} - \beta\right)^2}_{U_{eff}}$$

Encontramos los puntos de equilibrio

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta} = kR^2\left(\sqrt{3 - 2\cos\theta} - \beta\right)\frac{1}{2}\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3 - 2\cos\theta}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3 - 2\cos\theta} - \beta\right)\sin\theta \overset{!}{=} 0$$

por lo que tenemos puntos de eq. cuando $\sin\theta \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \theta_0 = 0, \pi$ y cuando

$$\sqrt{3-2\cos\theta}-\beta \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 3-2\cos\theta=\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{3-\beta^2}{2}$$

como $\cos\theta \in [-1,1] \Rightarrow -1 \leq \frac{3-\beta^2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 3-\beta^2 \leq 2$

$$\Leftrightarrow -5 \leq -\beta^2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow 5 \geq \beta^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \geq \beta \geq 1$$

b) Derivamos denuevo

$$\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(kR^2\left(\sqrt{3-2\cos\theta}-\beta\right)\frac{\sin\theta}{\sqrt{3-2\cos\theta}}\right)$$

$$= kR^2 \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta - \beta\frac{\sin\theta}{\sqrt{3-2\cos\theta}}\right)$$

$$= kR^2\left(\cos\theta - \beta\left(\cos\theta\sqrt{3-2\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3-2\cos\theta}}\right)\frac{1}{3-2\cos\theta}\right)$$

Para $\theta=0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} = kR^2\left(1-\beta\left(1\sqrt{1}-0\right)\frac{1}{1}\right)$

$$= kR^2(1-\beta)$$

Para $\theta=\pi \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = kR^2\left(-1-\beta\left(-\sqrt{5}-0\right)\frac{1}{5}\right)$

$$= kR^2\left(-1+\frac{\beta\sqrt{5}}{5}\right)$$

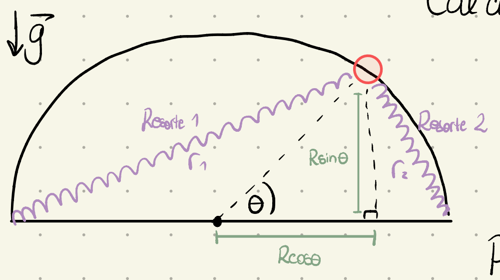
i) P estable $\longrightarrow 1-\beta>0 \Leftrightarrow 1>\beta$ y Q inestable $\longrightarrow -1+\frac{\beta}{\sqrt{5}}<0 \Leftrightarrow \beta<\sqrt{5}$

ii) P inestable $\longrightarrow 1-\beta<0 \Leftrightarrow 1<\beta$ y Q estable $\longrightarrow -1+\frac{\beta}{\sqrt{5}}>0 \Leftrightarrow \beta>\sqrt{5}$

c) Como la energía es de la forma $E=\frac{\alpha}{2}\dot{\theta}^2+U_{eff}(\theta) \Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{U''_{eff}(\theta)}{\alpha}}$. En este caso

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{\overbrace{kR^2(1-\beta)}^{U''_{eff}(\theta=0)}}{mR^2} = \frac{k}{m}(1-\beta)$$

P3



Calculando las distancias desde el origen de cada resorte a la partícula

$$r_1^2 = (R - R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta = 2R^2 - 2R^2\cos\theta$$

$$r_2^2 = (R + R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta = 2R^2 + 2R^2\cos\theta$$

Por lo que las energías potenciales elástica serían:

$$U_1(\theta) = \frac{1}{2}k(r_1 - l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(R\sqrt{2-2\cos\theta} - l_0\right)^2$$

$$U_2(\theta) = \frac{1}{2}k(r_2 - l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(R\sqrt{2+2\cos\theta} - l_0\right)^2$$

* $R = D/2$

Y la energía mecánica sería de la forma

$$E = \frac{1}{2}\underbrace{mR^2}_{\alpha}\dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}k\left(R\sqrt{2-2\cos\theta} - l_0\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(R\sqrt{2+2\cos\theta} - l_0\right)^2 + mgR\sin\theta}_{U_{eff}}$$

Calculamos los ptos. de eq.

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial\theta} = \frac{1}{2}k\left[2\left(R\sqrt{2-2\cos\theta} - l_0\right)\frac{R\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}} - 2\left(R\sqrt{2+2\cos\theta} - l_0\right)\frac{R\sin\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}}\right] + mgR\cos\theta \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{R^2\sin\theta} - \frac{l_0R\sin\theta}{\sqrt{2-2\cos\theta}} - \cancel{R^2\sin\theta} + \frac{l_0R\sin\theta}{\sqrt{2+2\cos\theta}} + \frac{mgR\cos\theta}{k} = 0$$

juntamos todo en una gran fracción multiplicando por $\sqrt{2-2\cos\theta}\sqrt{2+2\cos\theta}\cdot k = k\sqrt{4-4\cos^2\theta}$

$$\frac{1}{2\sqrt{4-4\cos^2\theta}}{}^{*}\left(-kl_0\cancel{R}\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta} + kl_0\cancel{R}\sin\theta\sqrt{2-2\cos\theta} + mg\cancel{R}\cos\theta\sqrt{2-2\cos\theta}\sqrt{2+2\cos\theta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -kl_0\sin\theta\left(\sqrt{2+2\cos\theta} - \sqrt{2-2\cos\theta}\right) + mg\cos\theta\sqrt{2-2\cos\theta}\sqrt{2+2\cos\theta} = 0$$

donde por inspección notamos que se cumple para $\theta = \pi/2$, que sería nuestro punto de eq.

* El denominador es $\neq 0$ para $\theta = \pi/2$, por lo que todo bien

Ahora, derivamos otra vez para imponer condiciones para la estabilidad

Usando el poder de la tecnología que claramente ustedes no pueden usar en control, llegamos a que

$$\frac{\partial U''_{eff}(\theta = \pi/2)}{\partial\theta} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\,k\,l_0 - 4gm\right)R \overset{!}{>} 0$$

para que sea estable

$\Rightarrow$ necesitamos que $\sqrt{2}\,k\,l_0 > 2gm$

o sea, tener resortes muy "fuertes" que hagan despreciable la fuerza peso

Luego la frecuencia de pequeñas oscilaciones se calcularía como

$$\omega_0^2 = \frac{U''_{eff}(\theta=\pi/2)}{\alpha} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\,k\,l_0 - 4gm\right)R\,\frac{1}{mR^2}$$