Auxiliar 15

Órbitas y fuerzas centrales

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.- Lindas trayectorias

Con una condición inicial específica se tiene que una partícula de masa m tiene un momentum angular conservado L. Considerando $E = 0$, encuentre la expresión de la energía potencial $V(r)$ para los siguientes casos de trayectorias espirales:

1. $r = r_0\theta^k$
2. $r = r_0 e^{a\theta}$
3. $r = r_0(1+\theta)$ (conocida?)

P2.-

Considere una partícula moviéndose en el potencial: $V(r) = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$.

1. Dado un momentum angular L, encuentre una ecuación para el radio de una órbita circular estable
2. La velocidad angular inicial define en parte el valor del momentum angular, ¿qué tan grande puede ser L para que no existan órbitas circulares?
3. Considerando la situación anterior, si r_0 es el radio de la órbita ciruclar en este caso límite, ¿cuál es el valor de $V_{\text{eff}}(r_0)$?

P3.-

Una partícula puntual que se mueve por una circunferencia de radio a es atraída por un punto C de la misma, por una fuerza de módulo $F = k/r^2$, donde r es la distancia al punto C. Determine el trabajo de la fuerza al ir la partícula del punto A hasta el punto B.

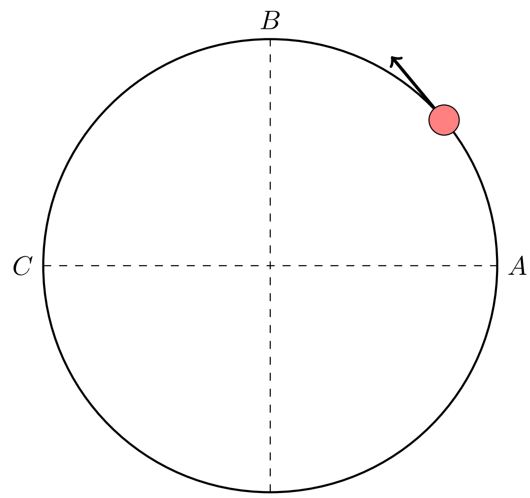


Figura 1

Pauta Auxiliar 15

P1

La energía se describe como

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

así que derivamos la expresión de las trayectorias, además recordando que $mr^2\dot{\theta} = L$

1. $\frac{dr}{dt} = kr_0\,\theta^{k-1}\dot{\theta} = \frac{kr}{\theta}\,\frac{L}{mr^2} = \frac{kL}{mr}\,\frac{1}{\theta}$, donde $\theta = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/k} \Rightarrow \dot{r} = \frac{kL}{mr}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/k}$

   reemplazando en (1)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{kL}{mr}\right)^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/k} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow V(\vec{r}) = \frac{-L^2}{2mr^2}\left(k^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/k} + 1\right)$$

2. $\frac{dr}{dt} = ar_0e^{a\theta}\dot{\theta} = ar\frac{L}{mr^2} = \frac{aL}{mr} \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{aL}{mr}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0$

$$\Leftrightarrow V(\vec{r}) = -\frac{L^2}{2mr^2}\left(a^2+1\right)$$

3. $\frac{dr}{dt} = r_0\dot{\theta} = \frac{r_0L}{mr^2} \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0L}{mr^2}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\frac{L^2}{2mr^2}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + 1\right)$

P2

Las órbitas circulares se dan en las posiciones de equilibrio, o sea, cuando $\partial V/\partial r = 0$, así que derivamos el potencial efectivo

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}\right|_{r_0} = 2\lambda^2 r_0 V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} - \frac{L^2}{mr_0^3} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow L^2 = 2m\lambda^2 r_0^4 V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} \quad (2)$$

con lo que conseguimos la ecuación que nos permitiría encontrar el radio r_0 de la órbita circular

Para encontrar el máximo valor de L t.q. se siga teniendo órbitas circulares, primero debe cumplir (2), donde notamos que el término $r_0^4e^{-\lambda^2r_0^2}$ tiende a 0 cuando $r_0 \to \infty$ (la exponencial le gana a r_0^4) y también cuando $r_0 \to 0$, por lo que debe existir un valor máximo de $r_0^4e^{-\lambda^2r^2}$, por lo tanto de L.

Derivamos e igualamos a 0 $r^4e^{-\lambda^2r^2}$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4e^{-\lambda^2r^2}\right)\right|_{r_0} = 4r_0^3e^{-\lambda^2r_0^2} - 2\lambda^2r_0^5e^{-\lambda^2r_0^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2r_0^3 - \lambda^2r_0^5 = 0 \Rightarrow r_0^2 = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow r_0^4 = \frac{4}{\lambda^4}$$

reemplazando en (2)

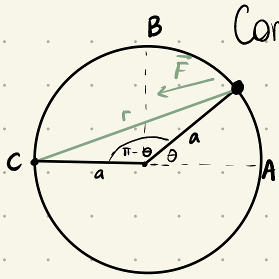
$$\Rightarrow L_{máx}^2 = 2m\lambda^2\,\frac{4}{\lambda^4}\,V_0\,e^{-\lambda^2\cdot 2/\lambda^2} = \frac{8mV_0e^{-2}}{\lambda^2} \quad (3)$$

que podemos reemplazar en la expresión del potencial efectivo

$$V_{eff}(\vec{r_0}) = \frac{L_{max}^2}{2mr_0^2} - V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} = \frac{8mV_0}{e^2\lambda^2}\cdot\frac{1}{2mr^2} - V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} = \frac{4V_0}{\lambda^2 e^2 r^2}$$

evaluando con $r_0^2 \Rightarrow V_{eff}(r_0) = \frac{4V_0}{\lambda^2 e^2}\frac{\lambda^2}{2} - \frac{V_0}{e^2} = \frac{V_0}{e^2}$

P3



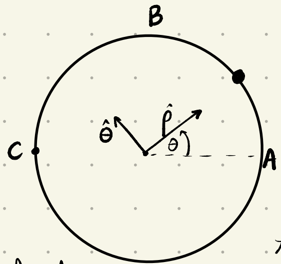
Como conocemos un ángulo y dos lados calculamos r con teorema del coseno

$$r^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos(\pi-\theta) = 2a^2(1-\cos(\pi-\theta)) = 2a^2(1+\cos(\theta)),$$

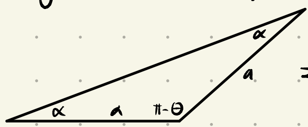
así que la fuerza, que es central dirigida siempre hacia C, sería

$$\vec{F} = \frac{k}{2a^2(1+\cos\theta)}\hat{r}$$

Elegimos nuestro sist. de coord en en centro del circulo para simplificar los cálculos, por lo que debemos descomponer la fuerza en los ejes de nuestro sist. en coord. polares

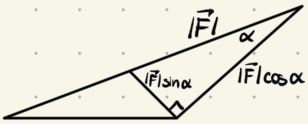


Ya que el triángulo del primer dibujo es isoceles, los ángulos faltantes son iguales y son $\alpha = \frac{\theta}{2}$



$\Rightarrow 2\alpha + \pi - \theta = \pi \Rightarrow \alpha = \theta/2$

Así que podemos formar un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es la magnitud de la fuerza



$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{-k}{2a^2(1+\cos\theta)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\rho} + \frac{k}{2a^2(1+\cos\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\theta}$$

Ahora, para calcular el trabajo recordamos que la masa se mueve en la circunferencia, por lo que la fuerza $\vec{F}$ en $\hat{\rho}$, y la normal que la contrarresta, es perpendicular al movimiento, así que no ejerce trabajo, por lo que solo ejerce trabajo la componente de $\vec{F}$ en $\hat{\theta}$, así que lo calculamos integrando en el ángulo entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ (posición A a B)

solo se mueve en $\hat{\theta}$

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r_f}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r_f}}\left(\frac{-k}{2a^2(1+\cos\theta)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\rho} + \frac{k}{2a^2(1+\cos\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\theta}\right)\cdot a\,d\theta\,\hat{\theta}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{-k}{2a^2(1+\cos\theta)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cancel{\hat{\rho}\cdot a\,d\theta\,\hat{\theta}}^{\perp} + \frac{k}{2a^2(1+\cos\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\theta}\cdot a\,d\theta\,\hat{\theta}$$

$$= \frac{k}{2a}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\theta/2)}{1+\cos\theta}\,d\theta$$

/ $\cos^2(\theta/2) = (1+\cos(\theta))/2$

$$= \frac{k}{2a}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}\,d\theta = \frac{k}{2a}\left.\frac{1}{\cos(\theta/2)}\right|_0^{\pi/2} = \frac{k}{2a}\left(\frac{1}{1/\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{k}{2a}(\sqrt{2}-1)$$

que es positivo, ya que la fuerza es en el sentido del movimiento.