Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3111 – Mecánica Clásica

Auxiliar 14

Variables de acción-ángulo

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.-

Una partícula de masa m y energía E se mueve en una dimensión en presencia del potencial

$$V(x) = a\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

donde a y x_0 son constantes conocidas.

a) Obtenga una expresión integral para la función característica del Hamiltoniano

b) ¿Bajo qué condiciones se pueden usar variables de acción-ángulo?

c) Asuma que se cumplan esas condiciones, encuentre la frecuencia de oscilación como función de la energía utilizando el método de acción-ángulo

d) Compruebe su resultado en (c) usando el límite de pequeñas oscilaciones

P2.- Oscilador tridimensional

Considere un oscilador armónico tridimensional de masa m y constantes elásticas distintas k_1, k_2, k_3 en las $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ direcciones.

a) Usando separación de variables e introduciendo variables de acción-ángulo $J_{1,2,3}$ y $w_{1,2,3}$, encuentre las frecuencias del oscilador. Utilice su conocimiento de la solución de las variables acción-ángulo para un oscilador armónico 1D

b) La conección de (w_i, J_i) con las variables originales (x_i, p_i) es obtenida con la generalización directa del resultado 1D:

$$x = \left(\frac{J}{\pi\sqrt{km}}\right)^{1/2}\sin(2\pi w), \qquad p = \left(\frac{J\sqrt{km}}{\pi}\right)^{1/2}\cos(2\pi w)\,.$$

Verifique usando corchetes de Poisson que sus variables acción-ángulo (w_i, J_i) de la parte (a) son variables canónicas, o sea que

$$[J_i, J_j]_{p,q} = 0, \quad [w_i, w_j]_{p,q} = 0, \quad [J_i, w_j]_{p,q} = \delta_{ij}$$

Formulario

Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema con s grados de libertad y con Hamiltoniano H, es

$$H\left(q_i, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,,$$

que es una EDP de primer orden, donde se busca calcular S (la función generadora) que tiene dependencia

$$S = S(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) = F_2(q, P, t)\,,$$

donde $\alpha_i = P_i$ son los momentums transformados (y que son constantes).
Habiendo calculado S hacemos:

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\,.$$

Con estas últimas s ecuaciones podemos despejar las coordenadas q en función de los α y β (las constantes de movimiento).

Variables de acción-ángulo

Para un movimiento periódico se pueden calcular las llamadas **variables de acción**

$$J_i \equiv \oint p_i \,\mathrm{d}q_i = \oint \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \,\mathrm{d}q_i$$

y las **variables de ángulo**

$$w_i \equiv \frac{\partial W_i}{\partial J_i}\,,$$

donde W_i es la función característica, proveniente del método de separación de variables, asociada a la coordenada q_i.

A partir de las variables de acción se pueden calcular las frecuencias de oscilación como

$$\nu_i \equiv \frac{\partial H}{\partial J_i}\,.$$

Auxiliar 14

P1

a) El Hamiltoniano es simplemente

$$H = \frac{p^2}{2m} + a\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

como no depende explícitamente del tiempo proponemos

$$S = W(x) - \alpha_1 \cdot t$$

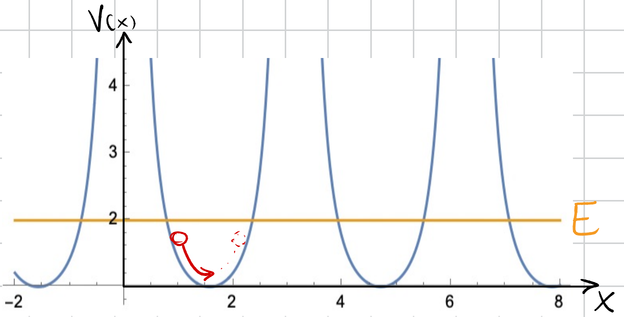

Fig 1: $a=1$, $x_0=1$ y $E=\alpha_1=2$

y la ec. de H-J sería

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}(\partial_x W)^2 + a\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{x_0}\right) = \alpha_1 \Rightarrow \partial_x W = \pm\sqrt{2m\alpha_1 - 2ma\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{x_0}\right)} \quad (1)$$

b) De la Fig 1 notamos qu debemos tomar una energía t.q. $E > V_{min} = a$ para tener un movi-miento periódico entre dos límites, digamos x_1 y x_2

c) Como $E = \alpha_1$, los puntos de retorno se calculan como

$$\alpha_1 = V(x^*)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{a}{\sin^2(x^*/x_0)}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{\alpha_1}}\right) \quad \wedge \quad x_2 = x_0\left[\pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{\alpha_1}}\right)\right]$$

* Realmente hay más soluciones, pero nos centraremos solo en la primera "U" del potencial.

Entonces, recordamos que $p = \partial_x W$, así que para el primer tramo del mov. tomamos el signo + en (1), y el signo − para el segundo tramo

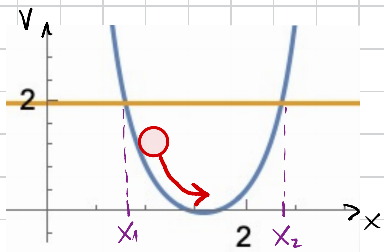

Fig 2: Primera parte del mov.

$$J = +\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\cdots}\,dx - \int_{x_2}^{x_1}\sqrt{\cdots}\,dx = 2\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m\alpha_1 - 2ma\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{x}{x_0}\right)}\,dx$$

$$= 2\sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\alpha_1 - a\frac{1}{\sin^2(x/x_0)}}\,dx$$

$$= 2\sqrt{2m\alpha_1}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 - \beta\frac{1}{\sin^2(x/x_0)}}\,dx \quad \text{con } \beta \equiv a/\alpha_1$$

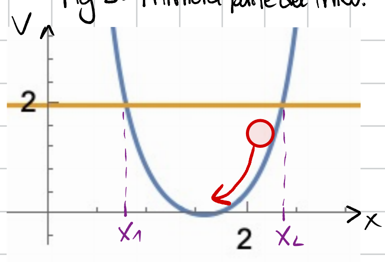

Fig 3: Segunda " "

bla bla, revisar cómo se integra esto en la pág. 467 del Goldstein

d) Para pequeñas oscilaciones consideramos $E \simeq V_{min} = a$ donde $x/x_0 \simeq \pi/2$

$$\Rightarrow V(x) = a\csc^2\left(\frac{x}{x_0}\right) = a + \frac{a}{x_0^2}\left(x - \frac{x_0\pi}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left[\cancel{x - x_0\pi/2}\right]^3\right)$$

$\tilde{x}$

que tiene la forma del potencial de un M.A.S y

$$\partial_x W = \pm\sqrt{2m(\alpha_1 - a) - 2m\frac{a}{x_0^2}\left(x - \frac{x_0\pi}{2}\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1 - m^2\omega^2\tilde{x}^2}$$

donde $\tilde{\alpha}_1 \equiv \alpha_1 - a$ y $\tilde{x} \equiv x - x_0\pi/2$. Entonces la variable de acción es

$$J = \oint \frac{\partial W}{\partial x}dx = +\int_{x_0\pi/2}^{x_2}\sqrt{\cdots}\,dx - \int_{x_2}^{x_0\pi/2}\sqrt{\cdots}\,dx - \int_{x_0\pi/2}^{x_1}\sqrt{\cdots}\,dx + \int_{x_1}^{x_0\pi/2}\sqrt{\cdots}\,dx$$

$$= 2\int_{x_0\pi/2}^{x_2}\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1 - m^2\omega^2\left(x - \frac{x_0\pi}{2}\right)^2}\,dx + 2\int_{x_1}^{x_0\pi/2}\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1 - m^2\omega^2\left(x - \frac{x_0\pi}{2}\right)^2}\,dx$$

donde

$$x_1 = x_0\arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{\alpha_1}}\right) \quad \wedge \quad x_2 = x_0\left[\pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{\alpha_1}}\right)\right]$$

para la 1era integral

entonces al hacer el c.v. $\tilde{x}_2 = x - \frac{x_0\pi}{2}$ el los límites de integración cambian como

$$x_2 \longrightarrow x_2 - \frac{x_0\pi}{2} = x_0\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{\alpha_1}}\right)\right] \equiv \tilde{x}_0$$

$$x_0\pi/2 \longrightarrow \frac{x_0\pi}{2} - \frac{x_0\pi}{2} = 0$$

y para la segunda integral

$$x_0\pi/2 \longrightarrow 0$$

$$x_1 \longrightarrow x_1 - \frac{x_0\pi}{2} = -x_0\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{\alpha_1}}\right)\right] = -\tilde{x}_0$$

así que tenemos

$$J = 2\int_0^{\tilde{x}_0}\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1 - m^2\omega^2\tilde{x}^2}\,d\tilde{x} + 2\int_{-\tilde{x}_0}^{0}\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1 - m^2\omega^2\tilde{x}^2}\,d\tilde{x}$$

$\int_b^a = -\int_a^b$ y hacemos $\tilde{x} \to -\tilde{x}$ (doble cambio de signo)

$$= 2\int_0^{\tilde{x}_0}\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1 - m^2\omega^2\tilde{x}^2}\,d\tilde{x} + 2\int_0^{\tilde{x}_0}\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1 - m^2\omega^2\tilde{x}^2}\,d\tilde{x}$$

$$= 4\int_0^{\tilde{x}_0}\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1 - m^2\omega^2\tilde{x}^2}\,d\tilde{x}$$

$$= \pi\sqrt{2m\tilde{\alpha}_1}\,\tilde{x}_0 = \pi\sqrt{2m(\alpha_1 - a)}\,x_0\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{\alpha_1}}\right)\right]$$

que debemos derivar c/r a α_1 e invertir el resulta

$$\gamma = \frac{\partial E}{\partial J} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\right)^{-1}$$, queda propuesto.

P2

El Hamiltoniano sería

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 y^2 + \frac{1}{2} m \omega_3^2 z^2$$

donde $\omega_i = \sqrt{k_i / m}$. Proponemos la fn generadora

$$S = W - E \cdot t = W_x(x) + W_y(y) + W_z(z) - E \cdot t$$

así que la ec. de H-J sería

$$\Rightarrow \frac{(\partial_x W_x)^2}{2m} + \frac{(\partial_y W_y)^2}{2m} + \frac{(\partial_z W_z)^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 y^2 + \frac{1}{2} m \omega_3^2 z^2 = E$$

▷ $\dfrac{(\partial_x W_x)^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m \omega_1^2 x^2 \overset{!}{=} \alpha_1$ ▷ $\dfrac{(\partial_y W_y)^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m \omega_2^2 y^2 \overset{!}{=} \alpha_2$

▷ $\dfrac{(\partial_z W_z)^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m \omega_3^2 z^2 \overset{!}{=} \alpha_3$

donde $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = E$. Por lo tanto, las variables de ángulo se definen como

$$J_i = \oint p_i \, dq_i = \oint \frac{\partial W_{q_i}}{\partial q_i} dq_i = \pm \oint \sqrt{2m\alpha_i - m^2 \omega_i^2 q_i^2} \, dq_i$$

que tiene la misma forma que para el M.A.S. en 1D donde teníamos

$$J = \oint p \, dq = \pm \oint \sqrt{2m\alpha - m^2 \omega^2 q^2} \, dq = \frac{2\pi\alpha}{\omega}$$

así que es fácil ver que

$$J_i = \frac{2\pi\alpha_i}{\omega_i} \quad (1)$$

y las fns W_i pueden ser reescritas como

$$W_i = \pm \int^{q_i} \sqrt{2m\alpha_i - m^2 \omega_i^2 q_i'^2} \, dq_i' = \pm \int^{q_i} \sqrt{m \frac{\omega_i}{\pi} \frac{2\pi\alpha_i}{\omega_i} - m^2 \omega_i^2 q_i'^2} \, dq_i'$$

$$= \pm \int^{q_i} \sqrt{m\omega_i} \sqrt{J_i / \pi - m \omega_i q_i'^2} \, dq_i'$$

y calculamos las variables de acción w_i como

$$w_i = \frac{\partial W_i}{\partial J_i} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m\omega_i}{\pi^2}} \int^{q_i} \frac{dq_i'}{\sqrt{J_i/\pi - m\omega_i q_i'^2}} = \pm \sqrt{\frac{m\omega_i}{4\pi^2}} \frac{1}{\sqrt{m\omega_i}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\pi m \omega_i}{J_i}} q_i' \right) \Bigg|^{q_i}$$

$$= \pm \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\pi m \omega_i}{J_i}} q_i \right) \quad (2) \quad + 0$$

libertad de elegir

de donde vemos que despejando q_i y tomando el signo +

$$\Rightarrow q_i = \sqrt{\frac{J_i}{\pi m \omega_i}} \sin(2\pi w_i) \quad (3)$$

y

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \pm \sqrt{m\omega_i} \sqrt{J_i/\pi - m\omega_i q_i^2}$$
$$= \pm \sqrt{m\omega_i} \sqrt{\frac{J_i}{\pi} - \frac{J_i}{\pi} \sin^2(2\pi w_i)}$$
$$= \pm \sqrt{\frac{m\omega_i J_i}{\pi}} \cos(2\pi w_i) \quad (4)$$

Ahora busquemos expresar J_i y w_i en función de q_i y p_i (despejar)

$$(3) \Rightarrow J_i = \pi m \omega_i \frac{q_i^2}{\sin^2(2\pi w_i)} \quad (5)$$

reemplazando en (4)

$$\Rightarrow p_i = m\omega_i \frac{q_i}{\sin(2\pi w_i)} \cos(2\pi w_i)$$

$$\Rightarrow w_i = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{m\omega_i q_i}{p_i}\right)$$

y reemplazando en (5)

$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Rightarrow J_i = \pi m \omega_i \frac{q_i^2}{\sin^2(\arctan(m\omega_i q_i/p_i))} = \frac{\pi}{m\omega_i} p_i^2 + \pi m \omega_i q_i^2$$

y calculemos uno de los corchetes (el resto queda propuesto)

- $[J_i, w_i] = \sum_k \left[\frac{\partial J_i}{\partial p_k} \frac{\partial w_j}{\partial q_k} - \frac{\partial J_i}{\partial q_k} \frac{\partial w_j}{\partial p_k} \right]$

  - $\frac{\partial J_i}{\partial p_k} = \frac{2\pi}{m\omega_i} p_i \delta_{ik} \quad \wedge \quad \frac{\partial J_i}{\partial q_k} = 2\pi m \omega_i q_i \delta_{ik}$

  - $\frac{\partial w_j}{\partial q_k} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+(m\omega_j q_j/p_j)^2} \frac{m\omega_j}{p_j} \delta_{jk} \quad \wedge \quad \frac{\partial w_j}{\partial p_k} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+(m\omega_j q_j/p_j)^2} \frac{m\omega_j q_j}{p_j^2} \delta_{jk}$

$$\Rightarrow [J_i, w_j] = \sum_k \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+(m\omega_j q_j/p_j)^2} \left[2\pi + 2\pi m^2 \omega_i \omega_j \frac{q_i q_j}{p_j^2} \right] \delta_{ik} \delta_{jk}$$

$$= \frac{1}{1+(m\omega_j q_j/p_j)^2} \left[1 + m^2 \omega_i \omega_j \frac{q_i q_j}{p_j^2} \right] \delta_{ij}$$

donde si $i=j \Rightarrow [J_i, w_i] = 1$ y si $i \neq j$ el corchete es nulo