Auxiliar 14

Preparación para la preparación del C2

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.- Examen P. Aceituno Primavera 2021

Dos partículas idénticas de masa m están unidas por una cuerda ideal sin masa de largo L. En la condición inicial la partícula A se encuentra sobre una mesa lisa horizontal mientras que la partícula B cuelga por el orificio O, quedando la mitad de la cuerda sobre la mesa, como muestra la figura. No existe ningún roce.

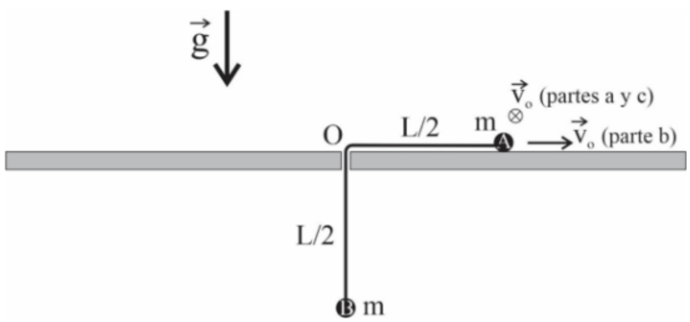


Figura 1: P1

a) Determine la rapidez v_0 que debe tener la partícula A de manera que en su movimiento se mantenga describiendo una circunferencia de radio $L/2$ en torno a O.

b) Si se da a la partícula A una rapidez inicial v_0 alejándose de O, determine el máximo valor que puede tener v_0 tal que la partícula B no choque con la mesa.

c) Si se da a la partícula A una rapidez inicial v_0 en la dirección perpendicular a la cuerda, determine el máximo valor que puede tener v_0 tal que la partícula B no choque con la mesa.

P2.- Control 1 P. Aceituno Otoño 2020

Una partícula de masa m se encuentra en un campo de fuerza de atracción cuya magnitud es proporcional a la distancia al punto de atracción ($\vec{F} = -k\vec{\rho}$). En un cierto instante la partícula se libera desde el reposo en una posición a una distancia ρ_0 del punto de atracción (ver figura adjunta). Cuando la partícula ha recorrido la mitad de esa distancia y su rapidez es v_1 (se pide calcularla) recibe un impuso perpendicular a la trayectoria que le da una componente de velocidad $v_2 = v_1/\sqrt{3}$ en esa dirección.

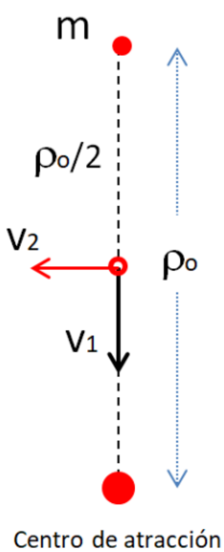


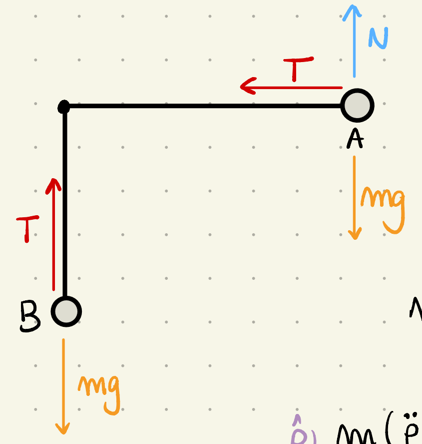
Figura 2: P2

a) Determine el valor de v_1.

b) Encuentre la rapidez máxima v_{max} y la menor distancia ρ_{min} que la partícula alcanza del centro de atracción en el movimiento posterior al impulso que cambió su trayectoria rectilínea, en función de $m,\ k$ y ρ_0.

Auxiliar 14

P1



Como tenemos dos masas, tendriemos dos sets de ecuaciones de movimiento.

Para la masa A usamos un sist. de coord. cilíndricas, donde consideramos las 3 fuerzas del dibujito de la izquierda y $|\vec{N}| = |m\vec{g}|$, ya que está sobre la mesa

$$m\left((\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}\right) = -T\hat{\rho} + mg\hat{k} - N\hat{k}$$

$\hat{\rho})$ $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -T$ (1) $\quad$ $\hat{\theta})$ $\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0$ (2) $\quad$ $\hat{k})$ $\ddot{z} = mg - N = 0$ (3)

Para B solo tenemos movimiento en $\hat{k}$ $\Rightarrow$ $m\ddot{z} = T - mg$ (4)

a) Imponemos que $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \wedge \rho = L/2$ para A y $\ddot{z} = 0 \Rightarrow T = mg$ para B, reemplazando en (1)

$$\Rightarrow -\frac{mL}{2}\dot{\theta}^2 = -mg$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \Rightarrow v = \frac{L}{2}\dot{\theta} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{gL}{2}}$$

b) Ahora no consideramos movimiento circular $\Rightarrow \theta \overset{!}{=} \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, así que (1) $\rightarrow$ $m\ddot{\rho} = -T$ (5)

Tenemos que $\rho - z = L \Rightarrow \ddot{\rho} = \ddot{z}$ (la distancia de las partículas al orificio)

(4) $\rightarrow$ $m\ddot{\rho} = T - mg$ (6), sumado con (5)

$$\Rightarrow 2m\ddot{\rho} = -mg \Rightarrow \ddot{\rho} = -\frac{g}{2} \quad / \int dt$$

$$\int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}} d\dot{\rho} = -\frac{g}{2}\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{\rho} = -\frac{g}{2}t + \dot{\rho}_0 \quad / \int dt$$

$$\Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho = -\frac{g}{2}\int_0^t t\,dt + \dot{\rho}_0\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \rho(t) = \rho_0 + \dot{\rho}_0 t - \frac{g}{4}t^2$$

donde por enunciado $\rho_0 = L/2$ y $\dot{\rho}_0 = +v_0$

$$\Rightarrow \dot{\rho}(t) = v_0 - \frac{g}{2}t \quad (7) \quad \wedge \quad \rho(t) = \frac{L}{2} + v_0 t - \frac{g}{4}t^2 \quad (8)$$

Calculamos el tiempo donde se detiene A (y por lo tanto también B) con (7)

$$v_0 - \frac{g}{2}t_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0}{g}$$

E imponemos que en t_1 $\rho(t=t_1) = L$ con (8) (para poder encontrar el valor necesario para v_0)

$$\frac{L}{2} + v_0 t_1 - \frac{g}{4} t_1^2 \overset{!}{=} L$$

$$\Leftrightarrow v_0 \cdot \frac{2v_0}{g} - \frac{g}{\cancel{4}} \frac{\cancel{4}v_0^2}{g^2} = \frac{L}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{g} = \frac{L}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2}}$$

c) Volvemos a considerar un movimiento circular. De (2) tenemos

$$\rho^2\dot{\theta} = \rho_0^2\dot{\theta}_0 = \rho_0 v_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\rho_0 v_0}{\rho^2}$$

Reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow m\left(\ddot{\rho} - \rho\,\frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^4}\right) = m\left(\ddot{\rho} - \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3}\right) = -T$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\rho} - \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} + \frac{T}{m} = 0$$

donde encontramos T de (4) y usando que $\ddot{z} = \ddot{\rho} \Rightarrow T = m\ddot{\rho} + mg$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} - \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} + \ddot{\rho} + g = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\rho} = \frac{\rho_0^2 v_0^2}{2\rho^3} - \frac{g}{2} \quad / \int d\rho$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{\rho}} \dot{\rho}\, d\dot{\rho} = \frac{\rho_0^2 v_0^2}{2} \int_{L/2}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^3} - \frac{g}{2}\int_{L/2}^{\rho} d\rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2} = \frac{\rho_0^2 v_0^2}{2} \cdot -\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\Big|_{L/2}^{\rho} - \frac{g}{2}\left(\rho - \frac{L}{2}\right)$$

$$= -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{4}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{4}{L^2}\right) - \frac{g}{2}\left(\rho - \frac{L}{2}\right)$$

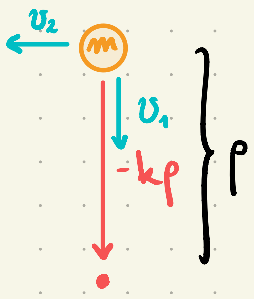
Ahora, imponemos que $\dot{\rho} = 0$ cuando $\rho = L$ (igual que antes)

$$\Rightarrow -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{4}\left(\frac{1}{L^2} - \frac{4}{L^2}\right) - \frac{g}{2}\left(L - \frac{L}{2}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{4} \cdot -\frac{3}{L^2} - \frac{gL}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\cancel{4}} \rho_0^2 v_0^2 = \frac{gL^3}{\cancel{4}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gL^3}{3\rho_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{3} L^3 \frac{4}{L^2}} = \sqrt{\frac{4}{3} gL}$$

P2



Aunque al comienzo es un movimiento unidimensional, usaremos un sist. de coord. polares, ya que solo tenemos una fuerza central, por ende, un mov. en un plano

$$m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta}\right)=-k\overbrace{\rho\hat{\rho}}^{\vec{\rho}}$$, con lo que obtenemos

$$\hat{\rho})\ m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)=-k\rho \quad (1) \quad ; \quad \hat{\theta})\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})=0 \quad (2)$$ conservación

a) Como en la primera parte el movimiento es solo en $\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$, por lo que integramos (1)

$$(1) \rightarrow \ddot{\rho}=-\frac{k}{m}\rho \quad \Big/ \int d\rho \text{ y truco mecánica}$$

$$\int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}}\dot{\rho}\,d\dot{\rho}=-\frac{k}{m}\int_{\rho_0}^{\rho}\rho\,d\rho \quad \Big/ \text{ por enunciado } \dot{\rho}_0=0 \wedge \rho_0=\rho_0$$

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2}=-\frac{k}{2m}(\rho^2-\rho_0^2) \quad (3)$$

Y notamos que $v_1=\dot{\rho}(\rho=\rho_0/2)$, evaluamos en (3)

$$\Rightarrow \frac{\dot{\rho}^2(\rho_0/2)}{2}=-\frac{k}{2m}\left(\frac{\rho_0^2}{4}-\rho_0^2\right)=\frac{k}{2m}\cdot\frac{3}{4}\rho_0^2=\frac{3}{8}\frac{k}{m}\rho_0^2=v_1$$

b) Luego de aplicada la velocidad v_2, se mantienen las ecs. de movimiento, solo cambian las condiciones iniciales.

Usamos la conservación del momentum angular ((2)) para obtener $\dot{\theta}(\rho)$

$$(2) \rightarrow \rho^2\dot{\theta}=\rho_{ini}^2\dot{\theta}_0=\rho_{ini}v_2 \Leftrightarrow \dot{\theta}=\frac{\rho_0 v_2}{2\rho^2}$$, reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow m\left(\ddot{\rho}-\rho\frac{\rho_0^2v_2^2}{4\rho^4}\right)=m\left(\ddot{\rho}-\frac{\rho_0^2v_2^2}{4\rho^3}\right)=-k\rho$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\rho}=\frac{\rho_0^2v_2^2}{4}\frac{1}{\rho^3}-\frac{k}{m}\rho \quad \Big/ \int d\rho \text{ y truco mecánica}$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\rho}_0}^{\dot{\rho}}\dot{\rho}\,d\dot{\rho}=\frac{\rho_0^2v_2^2}{4}\int_{\rho_0/2}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^3}-\frac{k}{m}\int_{\rho_0/2}^{\rho}\rho\,d\rho \quad \Big/ \dot{\rho}_0=v_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}=\frac{\rho_0^2v_2^2}{4}\cdot-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{4}{\rho_0^2}\right)-\frac{k}{2m}\left(\rho^2-\frac{\rho_0^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2(\rho)}{2}=\frac{v_1^2}{2}-\frac{\rho_0^2v_2^2}{8}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{4}{\rho_0^2}\right)-\frac{k}{2m}\left(\rho^2-\frac{\rho_0^2}{4}\right)$$

Con esto podemos calcular la distancia máxima y mínima imponiendo $\dot{\rho}\overset{!}{=}0$, o sea, que la masa deje de alejarse o acercarse respectivamente

$$\dot{\rho}\overset{!}{=}0 \Rightarrow \frac{v_1^2}{2}-\frac{\rho_0^2v_2^2}{8}\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{4}{\rho_0^2}\right)-\frac{k}{2m}\left(\rho^2-\frac{\rho_0^2}{4}\right)\overset{!}{=}0 \quad \Big/ \cdot\rho^2$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2}\rho^2 - \frac{\rho_0^2 v_2^2}{8}\left(1 - \frac{4}{\rho_0^2}\rho^2\right) - \frac{k}{2m}\left(\rho^4 - \frac{\rho_0^2}{4}\rho^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2m}\rho^4 - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right)\rho^2 + \frac{\rho_0^2 v_2^2}{8} = 0$$

Hacemos el cambio de variable $x = \rho^2$

$$\Rightarrow \frac{k}{2m}x^2 - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right)x + \frac{\rho_0^2 v_2^2}{8} = 0$$

que es una ecuación cuadrática y tiene dos soluciones $x_{+,-}$, donde tomamos x_- que es tomando el signo negativo de la sol. de la ec. cuadrática, luego $\rho_{min} = \sqrt{x_-}$ y por conservación del momentum angular

$$v_T = \frac{L}{m\rho}$$

tenemos que si ρ es mínimo, la velocidad es máxima.