Auxiliar 13

Hamilton-Jacobi y Variables de acción-ángulo

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Scattering

Utilizando Hamilton-Jacobi, escriba el movimiento de una partícula deflectada en presencia de un potencial $U(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}/r^3$. Exprese la ecuación de la trayectoria en término de cuadraturas; exprésela analíticamente para el caso cuando $E\rho^2 \gg a$, donde ρ es el parámetro de impacto. Considere que antes del *scattering* la velocidad de la partícula es paralela al vector $-\mathbf{a}$

P2.- Pozo de potencial

Una partícula de masa m se mueve en un plano en presencia de un pozo de potencial:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \text{ o } x > x_0 \\ -V_0, & \text{si } 0 \leq x \leq x_0\,. \end{cases}$$

a) ¿Bajo qué condiciones el método de variables de acción-ángulo puede ser aplicado?

b) Asumiendo que dichas condiciones se cumplen, use el método de variables de acción-ángulo para encontrar las frecuencias de movimiento

Formulario

Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema con s grados de libertad y con Hamiltoniano H, es

$$H\left(q_i, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,,$$

que es una EDP de primer orden, donde se busca calcular S (la función generadora) que tiene dependencia

$$S = S(q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s; t) = F_2(q, P, t)\,,$$

donde $\alpha_i = P_i$ son los momentums transformados (y que son constantes).
Habiendo calculado S hacemos:

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\,.$$

Con estas últimas s ecuaciones podemos despejar las coordenadas q en función de los α y β (las constantes de movimiento).

Variables de acción-ángulo

Para un movimiento periódico se pueden calcular las llamadas **variables de acción**

$$J_i \equiv \oint p_i \, \mathrm{d}q_i$$

y a partir de estas se pueden calcular las frecuencias de oscilación como

$$\nu_i \equiv \frac{\partial H}{\partial J_i}\,.$$

Auxiliar 13

P1

El Lagrangiano del sistema en coord. esféricas sería

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) - \frac{\vec{a}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

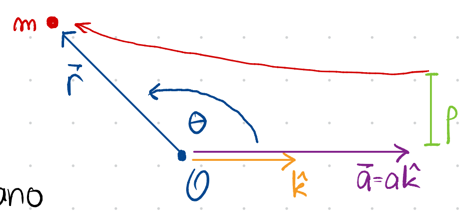
así que los momentum conjugados serían

▷ $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ ▷ $p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ ▷ $p_\phi = \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta$

y el Hamiltoniano

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^2\theta} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2r^2} + \frac{p_\phi^2}{m^2r^2\sin^2\theta} \right) + \frac{\vec{a}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta} \right) + \frac{\vec{a}\cdot\hat{r}}{r^2}$$



Hacemos la elección que $\hat{a} = \hat{k}$, por lo que la velocidad inicial va en $-\hat{k}$ como se muestra en la figura, entonces el Hamiltoniano se escribe como

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta} \right) + \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

Notamos que ϕ es una coordenada cíclica $\Rightarrow$ p_ϕ es una constante de mov., también H es independiente del tiempo, así que para usar $H-J$ proponemos

$$S = W(r,\theta,\phi) - Et$$

$$= W_r(r) + W_\theta(\theta) + \underbrace{\phi\cdot\alpha_\phi}_{\text{al ser } \phi \text{ cíclica}} - Et$$

por lo que los momentums se escribirían como

▷ $p_r = \dfrac{\partial S}{\partial r} = \dfrac{\partial W_r}{\partial r}$ ▷ $p_\theta = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = \dfrac{\partial W_\theta}{\partial \theta}$ ▷ $p_\phi = \dfrac{\partial S}{\partial \phi} = \alpha_\phi$

y la ec. H-J sería

$$\frac{1}{2m}\left[(\partial_r W_r)^2 + \frac{(\partial_\theta W_\theta)^2}{r^2} + \frac{\alpha_\phi^2}{r^2\sin^2\theta} \right] + \frac{a\cos\theta}{r^2} = E$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2(\partial_r W_r)^2 + (\partial_\theta W_\theta)^2 + \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta} + 2ma\cos\theta = 2mEr^2$$

donde definimos la parte angular como $(\partial_\theta W_\theta)^2 + \dfrac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta} + 2ma\cos\theta \equiv \underbrace{\alpha_1}_{\text{constante}}$

así que

$$W_\theta = \pm\int^{\theta}\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta' - \frac{\alpha_\phi^2}{\sin^2\theta'}}\,d\theta' \qquad \wedge \qquad W_r(r) = \pm\int^{r}\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}\,dr'$$

Como la velocidad inicial es en $-\hat{k}$, no hay velocidad inicial en $\hat{\phi}$, por lo que el momentum asociado a esta coord., inicialmente es $p_\phi(t=0)=0$ y como se conserva $\Rightarrow p_\phi = \alpha_\phi = 0 \ \forall t$

$$\Rightarrow \alpha_1 = (\partial_\theta W_\theta)^2 + 2ma\cos\theta \quad \Rightarrow \quad W_\theta(\theta) = \pm\int^{\theta}\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}\,d\theta'$$

$$\therefore\ S(r,\theta,\phi,t) = -Et \pm \int^{\theta}\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}\,d\theta' \pm \int^{r}\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}\,dr'$$

entonces los momentums tienen las expresiones

- $p_r = \dfrac{\partial S}{\partial r} = \pm\sqrt{2mE - \alpha_1/r^2}$ T.F.C.
- $p_\theta = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = \pm\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta}$

por la figura sabemos que inicialmente $\dot{r}<0$ y $\dot{\theta}>0 \Rightarrow p_r(t_0)<0$ y $p_\theta(t_0)>0$, así que

$$S(r,\theta,\phi,t) = -Et + \int^{\theta}\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}\,d\theta' - \int^{r}\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}\,dr'$$

Recordemos que tenemos las relaciones $\beta_i = \partial S/\partial\alpha_i$ con α_i constantes de movimiento y β_i también constantes (P_i y Q_i respectivamente), entonces tenemos otra ec. dada por

$$\beta_1 \equiv \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int_0^{\theta}\frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} + \int_{\infty}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}}, \quad \text{constante } \forall t,r,\theta$$

y como $\theta=0$ en $r=\infty$ (en $t=t_0$), ambas integrales en t_0 son $0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \ \forall t,r,\theta$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta}\frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} + \int_{\infty}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} = 0 \qquad (1)$$

y resolviendo estas integrales obtendríamos $r=r(\theta)$, o sea la trayectoria. No podemos dejar α_1 sin expresarla en f° de parámetros del problema, sabemos que es cte. e igual a

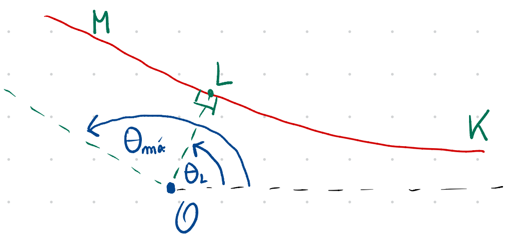
$$\alpha_1 = (\partial_\theta W_\theta)^2 + 2ma\cos\theta = p_\theta^2 + 2ma\cos\theta$$

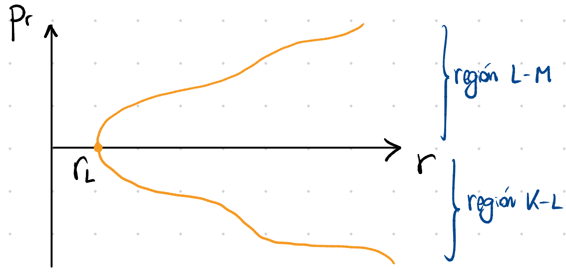
ver explicación en el foro

y para el tiempo inicial $\theta=0$ y $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = m\rho v$ como en un problema usual de scattering con v la velocidad inicial y que puede ser expresada en $E = mv^2/2$

$$\Rightarrow \alpha = m^2v^2\rho^2 + 2ma = 2m\left(\frac{1}{2}mv^2\rho^2 + a\right) = 2m(E\rho^2 + a)$$

Ahora, sabemos que no siempre $\dot{r}<0$, ya que se llega al punto de mayor cercanía al origen, punto L, desde donde r comienza a aumentar/alejarse ($\Rightarrow \dot{r}>0$) y $\dot{\theta}>0$ se mantiene. Esta coordenada está dada por las ecs.





(1): $\displaystyle\int_0^{\theta_L} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} + \int_\infty^{r_L} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} = 0$

y la condición que $p_r = 0$ (ver figura)

$$\Rightarrow p_r = -\sqrt{2mE - \alpha_1/r_L^2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow r_L = \sqrt{\frac{\alpha_1}{2mE}}$$

Región L-M

Para $\theta > \theta_L$ tenemos $p_r > 0 \wedge p_\theta > 0$, así que

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int_{\theta_L}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} - \int_{r_L}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} = 0 \quad (2)$$

que nuevamente es 0 tomando $\theta = \theta_L$ y $r = r_L$. La línea paralela a la trayectoria en $r \to \infty$ (a la izquierda) está determinada por $\theta_{máx}$ que se calcularía como

$$(2): \int_{\theta_L}^{\theta_{máx}} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} - \int_{r_L}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} = 0$$

pero no tenemos la expresión de θ_L, así que juntemos (1) y (2), con (1) evaluado en $(r,\theta) = (r_L, \theta_L)$

$$\int_{\theta_L}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} - \int_{r_L}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} + \int_0^{\theta_L} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} + \int_\infty^{r_L} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} - \int_{r_L}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} - \int_{r_L}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} = 0$$

y ahora sí evaluando en $(r,\theta) = (\infty, \theta_{máx})$

$$\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} = 2\int_{r_L}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}}$$

con lo que quería determinado θ_{max} resolviendo las integrales

Nuevamente usando que $\beta_i = \partial S/\partial \alpha_i$, pero ahora con $\alpha_i = E$ obtendríamos la ec.

$$\beta_E \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = -t - \int_\infty^{r} \frac{m\,dr'}{\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}}$$

y tomando $t_0 = 0$ donde $r = \infty \Rightarrow \beta_E = 0 \Rightarrow t = -\displaystyle\int_\infty^{r} \frac{m\,dr'}{\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}}$ con lo que conseguiríamos $r = r(t)$

Ahora consideremos el caso $E\rho^2 >> a$ donde (1) sería

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha_1 - 2ma\cos\theta'}} + \int_\infty^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2mE - \alpha_1/r'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{E\rho^2 + a - a\cos\theta'}} + \frac{1}{\sqrt{2m}}\int_\infty^{r} \frac{1}{r'^2}\frac{dr'}{\sqrt{E - (E\rho^2 + a)/r'^2}} = 0$$

la primera integral se aproximaría como

I) $$\int_0^{\theta}\frac{d\theta'}{\sqrt{E\rho^2+a-a\cos\theta'}}=\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\int_0^{\theta}\frac{d\theta'}{\sqrt{1+a/E\rho^2-\cos\theta'\cdot a/E\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\int_0^{\theta}\frac{d\theta'}{\sqrt{1+\delta x\,(1-\cos\theta')}}\quad \text{con } \delta x\equiv\frac{a}{E\rho^2}<<1$$

$$\approx\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\int_0^{\theta}d\theta'\left[1-\frac{1}{2}\frac{(1-\cos\theta')}{(1+\delta x(1-\cos\theta'))^{3/2}}\bigg|_{\delta x=0}\cdot\delta x\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\int_0^{\theta}d\theta'\left[1-\frac{(1-\cos\theta')}{2}\,\delta x\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\left[\left(1-\frac{\delta x}{2}\right)\theta+\sin\theta'\Big|_0^{\theta}\cdot\frac{\delta x}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\left[\left(1-\frac{\delta x}{2}\right)\theta+\frac{\delta x}{2}\sin\theta\right]$$

y la segunda integral tiene una expresión cerrada

$$\int_{\alpha}^{r}\frac{1}{r'^2}\frac{dr'}{\sqrt{E-(E\rho^2+a)/r'^2}}=\int_{\alpha}^{r}\frac{1}{r'^2}\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\frac{dr'}{\sqrt{1/\rho^2-(1+\delta x)/r'^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\int_{\alpha}^{r}\frac{1}{r'}\frac{dr'}{\sqrt{r'^2/\rho^2-(1+\delta x)}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+\delta x}\cdot\rho}{r'}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta x}}\Bigg|_{r'=\alpha}^{r'=r}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}\arcsin\left(\sqrt{1+\delta x}\,\frac{\rho}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta x}}$$

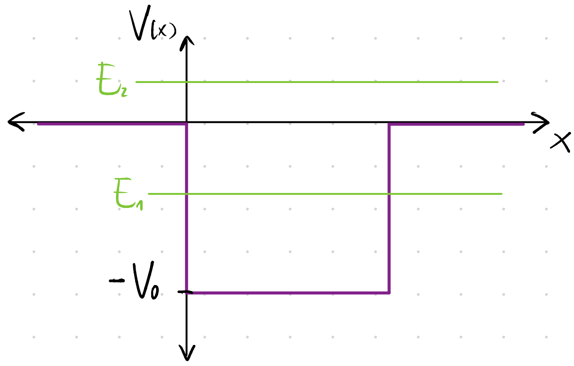
$$\Rightarrow\ \cancel{\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}}\left[\left(1-\frac{\delta x}{2}\right)\theta+\frac{\delta x}{2}\sin\theta\right]=\cancel{\frac{1}{\sqrt{E\rho^2}}}\arcsin\left(\sqrt{1+\delta x}\,\frac{\rho}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\delta x}}$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{1+\delta x}\,\frac{\rho}{r}=\sin\left\{\sqrt{1+\delta x}\left[\left(1-\frac{\delta x}{2}\right)\theta+\frac{\delta x}{2}\sin\theta\right]\right\}$$

$$\Leftrightarrow\ r(\theta)=\sqrt{1+\delta x}\cdot\rho\left[\sin\left\{\sqrt{1+\delta x}\left[\left(1-\frac{\delta x}{2}\right)\theta+\frac{\delta x}{2}\sin\theta\right]\right\}\right]^{-1}$$

P2

Tenemos el Hamiltoniano 1D



$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

y el potencial es un pozo de potencial como se ve en la figura. Para tener un mov. oscilatorio necesitamos que en algún rango de x la energía cumpla

$$V_{min} \leq E < V(x)$$

así que nos centramos en el intervalo $x \in [0, x_0]$, donde la partícula estaría atrapada si $-V_0 < E < 0$ (como E_1 de la figura). Escribamos el potencial como

$$V(x) = -V_0\,\Theta(x-0)\,\Theta(x_0 - x)$$

y como la energía se conserva $H = \frac{p^2}{2m} - V_0\Theta(x)\Theta(x_0-x) = E \Rightarrow p = \pm\sqrt{2m(E + V_0\Theta(x)\Theta(x_0-x))}$

así que la variable de acción sería

$$J = \oint p\,dx = \pm \oint \sqrt{2m(E + V_0\Theta(x)\Theta(x_0-x))}\,dx$$

donde la integral cerrada $\oint dx$ va desde que la partícula parte en $x=0$, da un ciclo completo y vuelve a $x=0$, en este trayecto, primero para $x \in [0, x_0]$ el momentum es positivo (la partícula avanza en la dirección positiva) y luego en la vuelta, $x \in [x_0, 0]$ el momentum es negativo

el ×2 que hablábamos

$$\Rightarrow J = +\int_0^{x_0} \sqrt{\%}\,dx - \int_{x_0}^{0} \sqrt{\%}\,dx = 2\int_0^{x_0} \sqrt{\%}\,dx = 2\int_0^{x_0} \sqrt{2m(E + V_0\Theta(x)\Theta(x_0-x))}\,dx$$

$$= 2\sqrt{2m(E+V_0)} \cdot x_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial E} = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2m}}{\sqrt{E+V_0}} = \sqrt{\frac{2m}{E+V_0}} \quad \therefore \nu = \frac{\partial E}{\partial J} = \left(\frac{\partial J}{\partial E}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{E+V_0}{2m}}$$