Auxiliar 13

Pequeñas oscilaciones I

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.- Oscilador amortiguado

Resuelva la ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado, o sea, encuentre $x = x(t)$.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

Considere el caso $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ y considere que en el tiempo inicial la partícula está en la posición x_0 y se le da una velocidad $\dot{x}_0$.

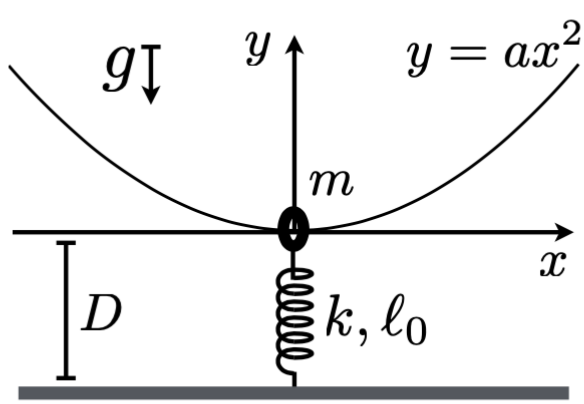
P2.- P3 C2 2015

Considere un alambre que describe una curva parabólica del tipo $y = ax^2$ en un plano vertical. Un anillo de masa m desliza con roce despreciable por el alambre, unido a un resorte de largo l_0 y constante elástica k. El otro extremo del resorte se encuentra atado a un punto fijo localizado a una distancia D del punto $(0,0)$ del sistema de coordenadas (x,y) (ver figura). Asuma $a = 1/l_0$ y $D = 2l_0$.

a) Si el anillo se encuentra inicialmente en el punto más bajo de la parábola, determine la velocidad v_0 con que se le debe impulsar para que alcance una altura D sobre la posición inicial

b) Demuestre que el punto $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable

c) Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del anillo alrededor del punto de equilibrio



Formulario

Puntos de equilibrio

De tener únicamente fuerzas conservativas (o que las no conservativas no ejerzan trabajo), los puntos de equilibrio r_0 cumplen que

$$\left.\frac{\partial U_{\text{tot}}(r)}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0.$$

Estos puntos pueden ser equilibrios estables o inestables según el signo de la segunda derivada

$$\left.\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} > 0 \quad (\text{estable})\,; \qquad \left.\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} < 0 \quad (\text{inestable})\,,$$

donde U_{tot} está en función de la coordenada r y es el potencial total del sistema, o sea

$$U_{\text{tot}}(r) = \sum_i U_i(r)\,.$$

Si la energía puede ser escrita en función de una sola variable, en este caso r, la frecuencia de oscilación en torno a los puntos de equilibrio **estables** está dada por

$$\omega = \sqrt{\left.\frac{\partial^2 U_{\text{tot}}(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} \frac{1}{m}}\,.$$

Auxiliar 13

P1

Tenemos la EDO de segundo orden, homogénea y de coef. constantes:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Para este tipo de EDOs ocupamos polinomio característico, con el ansatz $x = e^{\lambda t}$

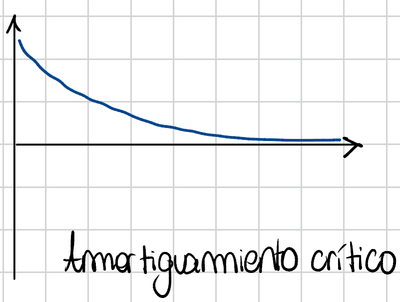
$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \quad /\cdot e^{-\lambda t}$$

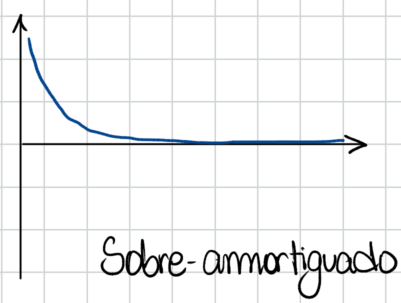
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (1)$$

donde en general tenemos 3 casos:

$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ | $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ | $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$





Nosotros consideraremos $\gamma < \omega_0$. Ocupando (1) tenemos la solución

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= c_1 e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t} + c_2 e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t}$$

donde la raíz es imaginaria, así que lo haremos explícito

$$\sigma := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-\gamma t} e^{i\sigma t} + c_2 e^{-\gamma t} e^{-i\sigma t}$$

$$= c_1 e^{-\gamma t}\left(\cos(\sigma t) + i\sin(\sigma t)\right) + c_2 e^{-\gamma t}\left(\cos(\sigma t) - i\sin(\sigma t)\right)$$

$$= (c_1 + c_2) e^{-\gamma t}\cos(\sigma t) + (ic_1 - ic_2) e^{-\gamma t}\sin(\sigma t)$$

$$= \tilde{c}_1 e^{-\gamma t}\cos(\sigma t) + \tilde{c}_2 e^{-\gamma t}\sin(\sigma t)$$

e impongamos C.I.

- $x(t=0) \overset{!}{=} x_0 \Rightarrow x_0 = \tilde{C}_1 \cdot 1 + \tilde{C}_2 \cdot 0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-\gamma t}\cos(\sigma t) + \tilde{C}_2 e^{-\gamma t}\sin(\sigma t)$
- $\dot{x}(t=0) \overset{!}{=} \dot{x}_0$, $\dot{x}(t) = e^{-\gamma t}\left(-x_0\sigma\sin(\sigma t) + \tilde{C}_2\sigma\cos(\sigma t)\right)$

$$-\gamma e^{-\gamma t}\left(x_0\cos(\sigma t) + \tilde{C}_2\sin(\sigma t)\right)$$

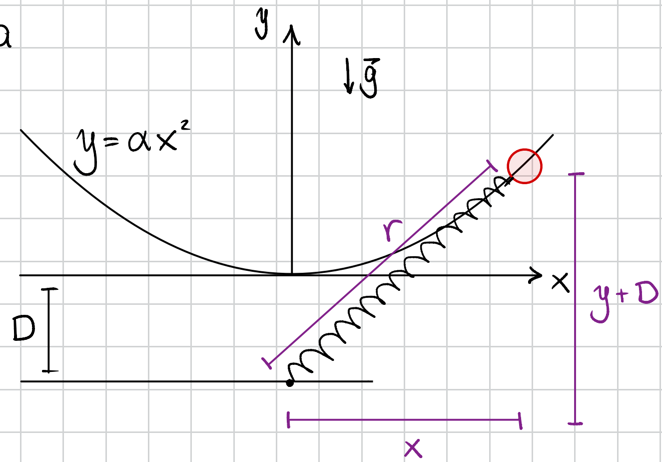
$$\Rightarrow \dot{x}_0 = \tilde{C}_2\sigma - \gamma x_0 \Rightarrow \tilde{C}_2 = \frac{\gamma x_0 + \dot{x}_0}{\sigma}$$

$$\therefore\ x(t) = x_0 e^{-\gamma t}\cos(\sigma t) + \left(\frac{\gamma x_0 + \dot{x}_0}{\sigma}\right)e^{-\gamma t}\sin(\sigma t)$$

P2

El resorte y el peso son fuerzas conservativas, y la normal no genera trabajo

$\therefore$ Se conserva la energía mecánica



a) Calculemos U_{tot}

- Potencial elástica: $U_E(r) = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$

$$= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + (y+D)^2} - l_0\right)^2$$

- Potencial gravitacional: $U_g(y) = mgy$

Así que la energía mecánica es

$$E = K + U_{tot} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+(y+D)^2} - l_0\right)^2 + mgy \qquad y = \alpha x^2$$

$$= \frac{1}{2}m(1 + 4\alpha^2x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\alpha^2x^4 + (2\alpha D + 1)x^2 + D^2} - l_0\right)^2 + mg\alpha x^2$$

$\alpha = \frac{1}{l_0}$, $D = 2l_0$

$$= \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{4}{l_0^2}x^2\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\frac{x^4}{l_0^2} + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)^2 + \frac{mg}{l_0}x^2$$

Nos dicen que inicialmente consideremos $|\vec{v}| = v_0$, $x_0 = 0$

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kl_0^2$$

y para el tiempo final $|\vec{v}| = 0$, $y_f = D \Rightarrow x_f = \sqrt{\frac{D}{\alpha}} = l_0\sqrt{2}$

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}kl_0^2(3\sqrt{2} - 1)^2 + 2mgl_0$$

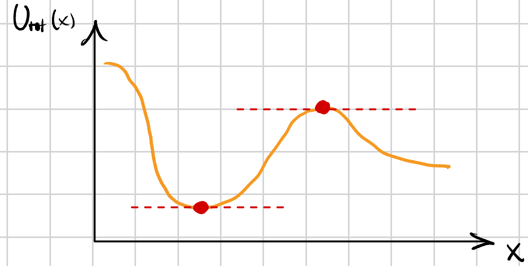
así que por conservación de la energía

$$E_0 = E_f \Rightarrow v_0 = \left(\frac{kl_0^2}{m}(3\sqrt{2} - 1)^2 + 4gl_0 - \frac{kl_0^2}{m}\right)^{1/2}$$

b) Tenemos la energía potencial total

$$U_{tot}(x) = \sum_i U_i = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\frac{x^4}{l_0^2} + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0 \right)^2 + \frac{mg}{l_0} x^2$$

y como la energía mecánica se conserva, los ptos. de equilibrio están dados por



$$\frac{\partial U_{tot}(x)}{\partial x} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial U_{tot}(x)}{\partial x} = k\left(\sqrt{\%} - l_0^2\right) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\%}} \cdot \left(\frac{4x^3}{l_0^2} + 10x \right) + \frac{2mg}{l_0} x$$

$$= \frac{k}{2} \left(1 - \frac{l_0^2}{\sqrt{\%}} \right) \left(\frac{4x^3}{l_0^2} + 10x \right) + \frac{2mg}{l_0} x$$

donde vemos que el punto $x=0$ cumple con ser pto. de equilibrio. Derivamos otra vez

$$\frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2} = \frac{k l_0^2}{4} \frac{1}{(\%)^{3/2}} \left(\frac{4x^3}{l_0^2} + 10x \right)^2 + \frac{k}{2} \left(1 - \frac{l_0^2}{\sqrt{\%}} \right) \left(\frac{12x^2}{l_0^2} + 10 \right) + \frac{2mg}{l_0}$$

que al evaluar en $x=0$

$$\left. \frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{l_0}{2} \right) \cdot 10 = \frac{5}{2} k (2 - l_0) + \frac{2mg}{l_0} > 0,$$

así que es estable.

c) Sabemos que cuando se conserva la energía mecánica, la frecuencia de pequeñas oscilaciones está dada por

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \cdot \left. \frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{5}{2} \frac{k}{m} (2 - l_0) + \frac{2g}{l_0}$$

y el periodo está dado por $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$