Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Auxiliar 13

Energía II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

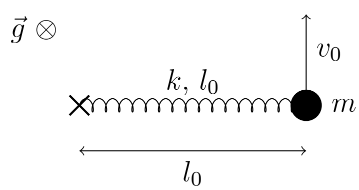
P1.- Ahora con energía

Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural.

a) ¿Cómo son las fuerzas que afectan la partícula?

a) Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$.

b) Determine también la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.



P2.- P2 Control 2 2014

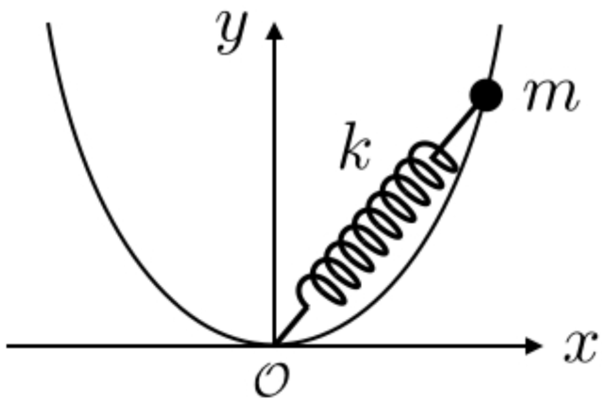
Un anillo de masa m puede deslizar sin roce por un alambre dado por $y = x^2/x_0$ (ver Figura). El anillo está unido a un resorte ideal de constante k, largo natural 0 ($l_0 = 0$), y sujeto al punto $\mathcal{O}$. Además de la fuerza del resorte $\vec{F}_R$ y de la fuerza ejercida por el alambre $\vec{F}_A$, sobre el anillo acúa una fuerza externa

$$\vec{F}_E = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{\imath} + \frac{3x_0}{4}y\hat{\jmath}\right) .$$

a) Identifique cuáles de estas fuerzas realizan trabajo. Justifique su respuesta.

b) Encuentre el trabajo total que se realiza sobre el anillo cuando este se mueve desde $x = x_0$ hasta $x = \lambda x_0$ con λ arbitrario

c) Encuentre todos los puntos en que el anillo posee la misma rapidez que la que tiene al pasar por el punto $x = x_0$



Formulario

Energía

La energía mecánica de un sistema de una partícula es igual a la suma de su energía cinética K y potencial U

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ &= \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + U \,, \end{aligned}$$

donde $|\vec{v}|$ es la rapidez de la partícula en el sistema de coordenadas que hayan elegido.

Trabajo

El trabajo ejercido por una fuerza se describe como la integral de tal fuerza en la trayectoria de la partícula

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \,.$$

El trabajo hecho por **todas** las **fuerzas no conservativas** nos da la diferencia de energía mecánica

$$E_B - E_A = W^{\mathrm{NC}}_{A\to B} \,.$$

El trabajo realizado por una **fuerza conservativa** $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ se puede calcular con

$$W^{\mathrm{C}}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(r_A) - U(r_B) \,,$$

donde U es el potencial asociado a $\vec{F}_C$, $\vec{F}_C = -\nabla U$.
Además, el **trabajo total** se puede calcular como

$$W^{\mathrm{tot}}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\mathrm{tot}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = K(r_B) - K(r_A) \,.$$

Conservación de la energía

Las fuerzas conservativas **conservan la energía mecánica**

$$
\begin{aligned}
&E_0 = E_f \\
\Leftrightarrow\ &K_0 + U_0 = K_f + U_f\ .
\end{aligned}
$$

Las fuerzas conservativas más comunes son las fuerzas centrales $\vec{F} = F\hat{r}$. En general, una fuerza es conservativa si su rotor es 0

$$
\nabla \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla U\ .
$$

Ojo que una fuerza conservativa **sí** puede ejercer trabajo.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

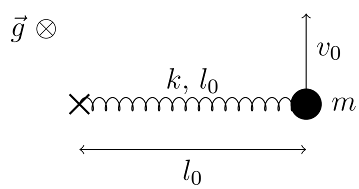
Pauta Auxiliar 13

Energía II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.-

Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural. Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$. Determine también la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.



Respuesta

Para este problema usamos la conservación de la energía mecánica, ya que no hay fuerzas disipativas, además tenemos que se conserva el momentum angular, debido a que no hay fuerzas actuando en $\hat{\phi}$, o sea, que usando coordenadas polares se tiene

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}(\rho^2\dot{\phi})}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \rho^2\dot{\phi} = \text{constante}.$$

Como en un primer instante el resorte se encuentra en su largo natural ($\rho_0 = l_0 \Rightarrow U_0 = 0$), solo hay energía cinética dada por la velocidad v_0, así que la energía mecánica inicial sería:

$$E_0 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,.$$

Además, por conservación del momentum angular tenemos que $\rho^2\dot{\phi} = l_0 v_0$.

Para este caso, la energía mecánica de forma general está dada, en coordenadas polares, por:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\rho) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2) + \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2.$$

Sabemos que en el momento en el que el resorte alcance su máxima elongación, la masa se detiene en el eje radial (deja de alejarse), o sea, $\dot{\rho} = 0$ en ese instante, así que utilizando que la posición en este caso es $4l_0$ y utilizando la conservación del momentum angular, obtenemos que la energía en el instante de máxima elongación es:

$$E_f = \frac{1}{2}m\left(\frac{l_0 v_0}{4l_0}\right)^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2,$$

que tiene que ser igual a la energía inicial $E_0 = E_f$,

$$\frac{1}{32}m{v_0}^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$
$$\Rightarrow {v_0}^2 = \frac{48}{5}\frac{k}{m}{l_0}^2.$$

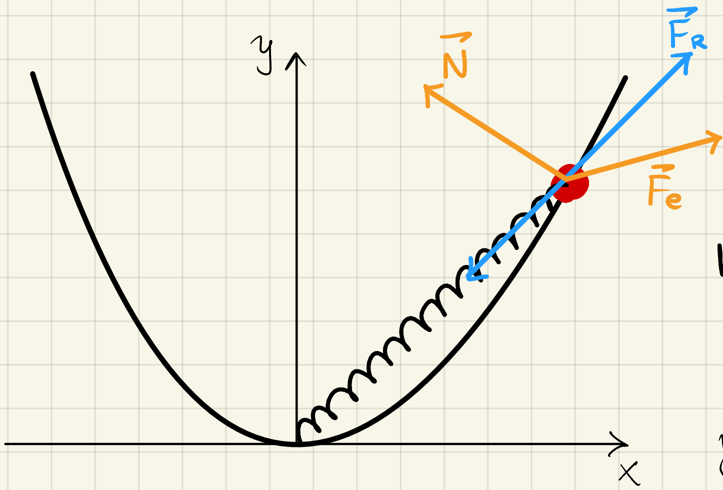
Para calcular la velocidad máxima del movimiento pensamos en que cuando se conserva la energía total se genera un equilibrio entre la energía cinética y la potencial (sumadas deben dar E), entonces la energía cinética (la velocidad) alcanza su máximo valor cuando la energía potencial alcanza su valor mínimo, en este caso eso sucede cuando el resorte está en su largo natural ($U(\rho = l_0) = 0$) donde sabemos que la velocidad es v_0,

$$\Rightarrow v_{máx} = v_0.$$

Siguiendo el mismo razonamiento, la energía cinética toma su valor mínimo cuando la potencial alcanza su valor máximo, que para la velocidad v_0 calculada, la elongación máxima es $4l_0$, así que ocupamos que la energía total inicial es igual a la energía mecánica cuando la velocidad es mínima,

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_{mín}}^2 + \frac{9}{2}k{l_0}^2$$
$$\Rightarrow {v_{mín}}^2 = \frac{3}{5}\frac{k}{m}{l_0}^2$$

P2



a) Las fuerzas que no ejercen trabajo son las que son perpendiculares a la trayectoria de la partícula. En este caso la normal siempre es perpendicular a la trayectoria, mientras que las otras fuerzas tienen componentes en la trayectoria, así que

$\vec{F}_R$ y $\vec{F}_E$ si ejercen trabajo

b) El vector posición de la partícula está dada por

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + \frac{x^2}{x_0}\hat{\jmath}$$

y en la fórmula del trabajo necesitamos el diferencial

$$\Rightarrow d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + \frac{2x\,dx}{x_0}\hat{\jmath}$$

Calculemos el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}_E$ desde

$$\vec{r}_A = x_0\hat{\imath} + \frac{x_0^2}{x_0}\hat{\jmath} = x_0\hat{\imath} + x_0\hat{\jmath} \quad \text{hasta} \quad \vec{r}_B = \lambda x_0\hat{\imath} + \lambda^2 x_0\hat{\jmath}.$$

Primero expresemos $\vec{F}_E$ en función solo de x usando $y = x^2/x_0$

$$\vec{F}_E = \frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}\hat{\imath} + \frac{3}{4}x^2\hat{\jmath}\right)$$

entonces el trabajo es

$$W_E = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_E(\vec{x})\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}\hat{\imath} + \frac{3}{4}x^2\hat{\jmath}\right)\cdot\left(dx\,\hat{\imath} + \frac{2x}{x_0}dx\,\hat{\jmath}\right)$$

$$= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \left[\frac{kx^3}{x_0^2}dx + \frac{3}{2}k\frac{x^3}{x_0^2}dx\right]$$

$$= \int_{x_0}^{\lambda x_0} \frac{5}{2}\frac{k}{x_0^2}x^3dx = \frac{5}{2}\frac{k}{x_0^2}\left.\frac{x^4}{4}\right|_{x_0}^{\lambda x_0} = \frac{5}{8}kx_0^2(\lambda^4 - 1)$$

Debido a que la fuerza del resorte tiene una forma "complicada" (inténtenlo) para calcular el trabajo con la fórmula integral, podemos usar la fórmula del trabajo para fuerzas conservativas ($\vec{F}_R$ es fuerza central, así que es conservativa)

$$W_c = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_c\cdot d\vec{r} = U_c(\vec{r}_A) - U_c(\vec{r}_B)$$

ojo con el orden

Sabemos que el potencial de la fuerza del resorte es $U_R(r) = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2$ donde r es la distancia desde el origen a la partícula

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{x_0^2}}$$

Evaluando en $x_A = x_0$ y $x_B = \lambda x_0$ en el potencial

- $U_R(x_A) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x_0^2+x_0^2}\right)^2 = kx_0^2$
- $U_R(x_B) = \frac{1}{2}k\left(\lambda^2 x_0^2 + \lambda^4 x_0^2\right) = \frac{1}{2}kx_0^2(\lambda^2+\lambda^4)$

$$W_R = U_R(x_A) - U_R(x_B) = kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_0^2(\lambda^2+\lambda^4)$$

Así que el trabajo total es la suma $W_{tot} = W_E + W_R = \frac{5}{8}kx_0^2(\lambda^4-1) + kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_0^2(\lambda^2+\lambda^4)$

$$= \frac{1}{8}kx_0^2\lambda^4 + \frac{3}{8}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_0^2\lambda^2$$

c) Recordemos la fórmula del trabajo total

$$W_{tot} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = K(r_B) - K(r_A)$$

donde notamos que cuando $W_{tot} = 0 \Rightarrow K(r_B) = K(r_A)$ que en nuestro caso sería $K(\lambda x_0) = K(x_0)$ osea, que podemos despejar los λ^* que cumplan que $W_{tot} = 0 \Rightarrow$ la partícula en $x = \lambda^* x_0$ tenga la misma energía cinética que en $x = x_0$, o sea tengan la misma rapidez (que es lo que buscamos)

$$\Rightarrow W_{tot}(\lambda^*) = \frac{1}{8}kx_0^2\lambda^{*4} + \frac{3}{8}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_0^2\lambda^{*2} \overset{!}{=} 0$$

donde si hacemos el c.v. $\tilde{\lambda} = \lambda^{*2}$ tenemos una ec. cuadrática

$$\Rightarrow \frac{1}{8}kx_0^2\tilde{\lambda}^2 - \frac{1}{2}kx_0^2\tilde{\lambda} + \frac{3}{8}kx_0^2 = 0 \quad /\cdot \frac{8}{kx_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\lambda}^2 - 4\tilde{\lambda} + 3 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1$$

Así que los λ^* que cumplen $W_{tot}(\lambda^*) = 0$ son $\lambda^* \in \{-1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$