Auxiliar 13

Variación de la energía

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudante: Gerald Barnert

P1.-

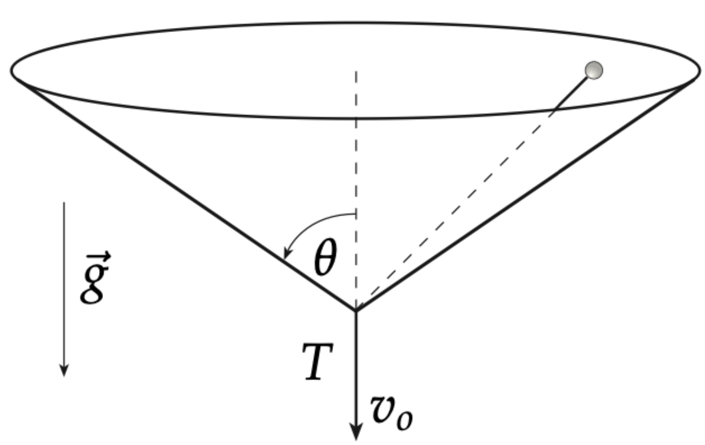
Una partícula P de masa m desliza sin roce por el interior de un cono invertido. El cono tiene eje vertical, vértice abajo y ángulo característico $\theta = \pi/3$. La partícula está unida a un hilo, siempre tenso, que pasa por el vértice del cono. La tensión T es tal que la distancia entre la partícula y el vértice disminuye en la forma: $r_0 - v_0 t$. En el instante inicial P está a distancia r_0 del vértice girando de modo que $\phi(0) = \omega_0$, en torno al eje central.

a) Reduzca la segunda ley de Newton a tres ecuaciones escalares e indique la dependencia explícita en t de cada una de las coordenadas de P.

b) Obtenga la condición que debe cumplirse para que el hilo esté tenso en el instante inicial.

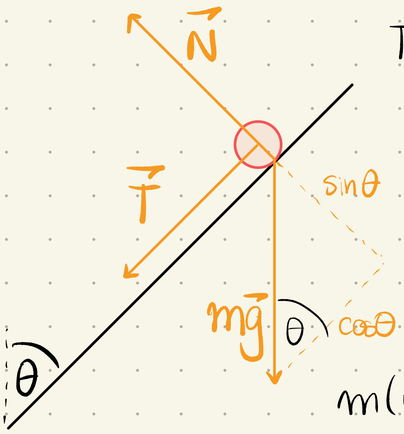
c) Obtenga el trabajo W_T de la tensión T desde el momento inicial hasta el instante t_1 en que la distancia de P al vértice es la mitad de la inicial. Explique el significado físico del signo de este trabajo.

d) Obtenga la energía cinética en un instante t arbitrario y de ahí obtenga la diferencia $K_1 - K_0$ entre la energía cinética final ($t = t_1$) y la inicial ($t = 0$). ¿Cuánto vale $K_1 - K_0 - W_T$? ¿Por qué?



Auxiliar 13

P1



Tenemos 3 fuerzas

- Tensión: $\vec{T} = -T\hat{r}$
- Normal: $\vec{N} = -N\hat{\theta}$
- Peso: $m\vec{g} = mg\sin\theta\hat{\theta} - mg\cos\theta\hat{r}$

Y ocupamos esféricos porque es más facil describir la dirección de las fuerzas

$$m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)\hat{\phi}\right) = -T\hat{r} - N\hat{\theta} + mg\sin\theta\hat{\theta} - mg\cos\theta\hat{r}$$

Donde $\theta = \pi/3 \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

a) $\hat{r}$) $m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = -T - mg\cos\theta$

$\hat{\theta}$) $-mr\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -N + mg\sin\theta$

$\hat{\phi}$) $\dfrac{m}{r\sin\theta}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0$

Además tenemos que $r(t) = r_0 - v_0 t \Rightarrow \dot{r}(t) = -v_0 \Rightarrow \ddot{r} = 0$

$\hat{r}$) $-m(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2\sin^2\theta = -T - mg\cos\theta$

$\hat{\theta}$) $-m(r_0 - v_0 t)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -N + mg\sin\theta$

$\hat{\phi}$) $\dfrac{d}{dt}\left((r_0 - v_0 t)^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0$

b) Para que el hilo esté tenso en $t=0$ imponemos $T(t=0) > 0$. De $\hat{\phi}$) tenemos

$$(r_0 - v_0 t)^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \ell = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t) = \frac{\ell}{(r_0 - v_0 t)^2\sin^2\theta}$$, reemplazamos en $\hat{r}$)

$$\Rightarrow -m\cancel{(r_0 - v_0 t)}\frac{\ell^2}{(r_0 - v_0 t)^{\cancel{4}\,3}\sin^{\cancel{4}\,2}\theta}\cancel{\sin^2}\theta = -T - mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow T(t) = \frac{m\ell^2}{(r_0 - v_0 t)^3\sin^2\theta} - mg\cos\theta$$, imponemos $T(t=0) > 0$

$$\Rightarrow T(t=0) = \frac{m\ell^2}{r_0^3\sin^2\theta} - mg\cos\theta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{r_0^3}\frac{1}{g} > \cos\theta \sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell^2}{g r_0^3} > \frac{3}{8}$$

ℓ es cte en el tiempo

por lo tanto recordando que $\ell = (r_0 - v_0 t)^2 \dot\phi \sin^2\theta = r_0^2 \dot\phi_0 \sin^2\theta$

$$\Rightarrow \frac{r_0^4 \dot\phi_0^2 \sin^4\theta}{g r_0^3} = \frac{r_0 \dot\phi_0^2}{g}\cdot\frac{9}{16} > \frac{3}{8}$$

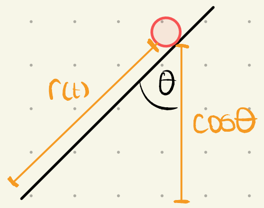
$$\Leftrightarrow r_0 \dot\phi_0^2 > \frac{3}{2} g$$

o sea, nos basta con aplicar una velocidad angular inicial muy grande

c) Podemos calcular el trabajo como la variación de la energía mecánica, busquemos expresar la

$$E = \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2 \dot\phi^2 \sin^2\theta) + mgh$$

donde la altura está dada por la distancia al vértice $h(t) = r(t)\cos\theta$



$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} m\left(v_0^2 + \cancel{(r_0 - v_0 t)^2} \frac{\ell^2}{(r_0 - v_0 t)^{\cancel{4}\,2} \sin^{\cancel{4}\,2}\theta} \cancel{\sin^2\theta}\right) + mg(r_0 - v_0 t)\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{r_0^4 \dot\phi_0^2 \sin^2\theta}{(r_0 - v_0 t)^2} \right) + mg(r_0 - v_0 t)\cos\theta$$

Ahora nos dicen que calculemos hasta t_1 donde $r = r_0/2$, por lo que reemplazamos

$$r_0 - v_0 t \longrightarrow r_0/2 \quad \text{para la energía final}$$

$$\Rightarrow \Delta E = E_{t_1} - E_{t_0} = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{r_0^4 \dot\phi_0^2 \sin^2\theta}{r_0^2/4} \right) + \frac{m g r_0 \cos\theta}{2} - \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{r_0^4 \dot\phi_0^2 \sin^2\theta}{r_0^2} \right) - m g r_0 \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} m r_0^2 \dot\phi_0^2 \sin^2\theta \,(4-1) + m g r_0 \cos\theta \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{3}{2} m r_0^2 \dot\phi_0^2 \sin^2\theta - \frac{m g r_0 \cos\theta}{2}$$

$$= \frac{9}{8} m r_0^2 \dot\phi_0^2 - \frac{m g r_0}{4} \quad (1)$$

Ok, ya tenemos cómo cambia la energía mecánica en un intervalo de tiempo, esto es debido a la tensión que es una fuerza no conservativa (la normal no ejerce trabajo porque es perpendicular al desplazamiento)

$$\Rightarrow W_T = \Delta E = \frac{9}{8} m r_0^2 \dot\phi_0^2 - \frac{m g r_0}{4}$$

Recordamos que impusimos $r_0\dot{\phi}_0^2 > \frac{3}{2}g$

$$\Leftrightarrow r_0\dot{\phi}_0^2 - \frac{3}{2}g > 0 \qquad /\cdot \frac{9}{8}mr_0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2 - \frac{27}{16}mgr_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2 - \frac{mgr_0}{4} > \frac{27}{16}mgr_0 - \frac{mgr_0}{4}$$

$$\Leftrightarrow W_T > \frac{11}{16}mgr_0 > 0$$

Por lo que el trabajo es positivo, así que la tensión le inyecta energía al sistema ($E_f - E_0 > 0$)

d) Para esto tomamos solo la parte cinética de (1)

$$\Rightarrow K_1 - K_0 = \frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2$$

$$\Rightarrow K_1 - K_0 - W_T = \frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2 - \left(\frac{9}{8}mr_0^2\dot{\phi}_0^2 - \frac{mgr_0}{4}\right)$$

$$= \frac{mgr_0}{4}$$

Que representa el trabajo del peso. Notar que las fuerzas conservativas (como el peso) también tienen asociadas un trabajo, al igual que las no conservativas, sin embargo este trabajo se cancela con el "producido" por el cambio de la energía cinética cuando no hay fuerzas no conservativas