Auxiliar 12

Transformaciones infinitesimales y Hamilton-Jacobi

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Oscilador armónico con Hamilton-Jacobi

Muestre que la función

$$S = \frac{m\omega}{2}\left(q^2 + \alpha^2\right)\cot(\omega t) - m\omega q\alpha \operatorname{cosec}(\omega t)$$

es solución de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton del oscilador armónico lineal con

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right).$$

Muestre que esta función genera una solución correcta para el movimiento del oscilador armónico.

P2.- Transformación infinitesimal

Determine las transformaciones canónicas que son resultado de las siguientes funciones generadoras:

a) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{P} + \delta\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}$ con $\delta\mathbf{a}$ una distancia pequeña

b) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{P} + \delta\theta L_z(\mathbf{r}, \mathbf{P})$ con $L_z = xP_y - yP_x$ y $\delta\theta$ un ángulo pequeño

c) $\Phi(q, P) = qP + \delta\tau H(q, P, t)$ con H el Hamiltoniano y $\delta\tau$ un intervalo de tiempo pequeño

Formulario

Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema con s grados de libertad y con Hamiltoniano H, es

$$H\left(q_i, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0\,,$$

que es una EDP de primer orden, donde se busca calcular S (la función generadora) que tiene dependencia

$$S = S(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) = F_2(q, P, t)\,,$$

donde $\alpha_i = P_i$ son los momentums transformados (y que son constantes).
Habiendo calculado S, las coordenadas transformadas se calculan como

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\,.$$

Con estas últimas s ecuaciones podemos despejar las coordenadas q en función de los α y β (las constantes de movimiento).

Auxiliar 12

P1

Nos dicen que consideremos la función

$$S(q,t;\alpha) = \frac{m\omega}{2}(q^2+\alpha^2)\cot(\omega t) - m\omega q\alpha\,\mathrm{cosec}(\omega t)$$

y para ver que soluciona la ec. de Hamilto-Jacobi, la reemplazamos en la ec.

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (1)$$

donde estamos considerando el Hamiltoniano de un oscilador armónico simple

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$$

y como S es una fn generadora que depende de q y P (esto por definición)

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = m\omega q\cot(\omega t) - m\omega\alpha\,\mathrm{cosec}(\omega t)$$

así que el primer término de (1) sería

$$H = \frac{1}{2m} m^2\omega^2\left[(q\cot(\omega t) - \alpha\,\mathrm{cosec}(\omega t))^2 + q^2\right]$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}\left[q^2\frac{\cos^2(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} - 2\alpha q\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} + \alpha^2\frac{1}{\sin^2(\omega t)} + q^2\right]$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}\left[q^2\frac{1}{\sin^2(\omega t)} - 2\alpha q\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)} + \alpha^2\frac{1}{\sin^2(\omega t)}\right]$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}\left[(q^2+\alpha^2)\frac{1}{\sin^2(\omega t)} - 2\alpha q\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)}\right]$$

mientras que el segundo término es

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m\omega}{2}(q^2+\alpha^2)\frac{\omega}{\sin^2(\omega t)} + m\omega q\alpha\frac{\cos(\omega t)}{\sin^2(\omega t)}\cdot\omega$$

entonces notamos que en la ec. de H-J se cancelan estas dos contribuciones

$$(1) \rightarrow H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$\therefore$ El S del enunciado es sol. de la ec. de H-J

Para calcular q tomamos la derivada de S c/r a la cte de movimiento α

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = m\omega \alpha \cot(\omega t) - m\omega q \operatorname{cosec}(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow q \frac{1}{\sin(\omega t)} = \alpha \frac{\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} - \frac{\beta}{m\omega}$$

$$\Leftrightarrow q = \alpha \cos(\omega t) - \frac{\beta}{m\omega} \sin(\omega t)$$

que es la solución de un oscilador armónico simple donde

$$\alpha = q(t=0) \quad \wedge \quad \beta = -m\dot{q}(t=0)$$

P2

Notamos que todas las funciones generadoras son de la forma

$$F_2(\{q_i\},\{P_j\},t) = \Phi(\{q_i\},\{P_j\},t)$$

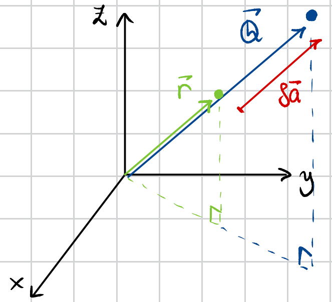
entonces las transf. canónicas están dadas por

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad \wedge \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}$$

a) $\Phi(\vec{r},\vec{P}) = \vec{r}\cdot\vec{P} + \delta\vec{a}\cdot\vec{P}$

▹ $p_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i} = P_i$ ▹ $Q_i = q_i + \delta a_i \Rightarrow \vec{p} = \vec{P} \wedge \vec{Q} = \vec{q} + \delta\vec{a}$

∴ El momentum es generador de traslaciones espaciales



b) $\Phi = \vec{r}\cdot\vec{P} + \delta\theta(xP_y - yP_x)$

▹ $p_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i} = P_i + \delta\theta(\delta_{1i}P_y - \delta_{2i}P_x)$

$\vec{p} = \vec{P} + O(\delta\theta)$

$\approx P_i + \delta\theta(\delta_{1i}p_y - \delta_{2i}p_x) \Rightarrow P_i = p_i + \delta\theta(\delta_{2i}p_x - \delta_{1i}p_y)$

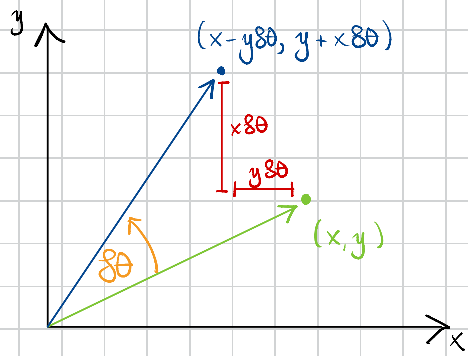
▹ $Q_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial P_i} = q_i + \delta\theta(x\delta_{2i} - y\delta_{1i})$

∴ $X = x - \delta\theta\, y$; $Y = y + \delta\theta\, x$; $Z = z$

Donde recordemos que si hacemos una rotación de ángulo θ c/r al origen

$$\vec{r}' = R_z(\theta)\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$$



y si tomamos $\theta = \delta\theta \to 0 \Rightarrow \vec{r}' = R_z(\delta\theta)\vec{r} = \overbrace{(x - y\delta\theta)}^{X}\hat{\imath} + \overbrace{(y + x\delta\theta)}^{Y}\hat{\jmath} + \overbrace{z}^{Z}\hat{k}$

∴ El momentum angular L_z es generador de rotaciones en torno al eje $\hat{k}$

c) $\Phi(q,P,t) = qP + \delta T \cdot H(q,P,t)$ donde asumimos $p = P + O(\delta T)$

$$\Rightarrow H(q,P,t) = H(q,p+\delta T,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n H(q,P,t)}{\partial P^n}\right|_{\delta T=0} (P-p)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n H(q,P,t)}{\partial P^n}\right|_{\delta T=0} \delta T^n$$

$$= H(q,p,t) + H'(q,P,t)\Big|_{\delta T=0} \delta T + \dots$$

▷ $p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} = P + \delta T \frac{\partial H}{\partial q}(q,P,t) = P + \delta T \frac{\partial}{\partial q}\left[H(q,p,t) + \cancel{H'(q,P,t)\Big|_{\delta T=0} \delta T} + \cancel{\dots} \right]$ haría un término δT^2

$$= P + \delta T \frac{\partial}{\partial q} H(q,p,t) + \cancel{O(\delta T^2)}$$

$$\approx P - \dot{p}\,\delta T \quad \Rightarrow P = p + \dot{p}\,\delta T$$

$$\Rightarrow P = p(t+\delta T) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{p^{(n)}}{n!}\right|_{\delta T=0} \delta T = p(t) + \dot{p}\,\delta T + \cancel{O(\delta T^2)}^{\sim 0}$$

▷ $Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P} = q + \delta T \frac{\partial}{\partial P} H(q,P,t) \approx q + \delta T \frac{\partial}{\partial p} H(q,p,t) = q + \dot{q}\,\delta T$

$$\Rightarrow Q = q(t+\delta T)$$

∴ El Hamiltoniano es generador de evolución temporal