Auxiliar 12

Fuerzas centrales, órbitas y pequeñas oscilaciones

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.-

Una partícula de masa m se mueve en un espacio con un potencial descrito por $V(r) = \beta r^k$, con β y k constantes. Considere que se sabe que el momentum angular en un punto es L, responda/calcule:

1. ¿El momentum angular es constante?, ¿por qué?
2. Encuentre el radio r_0 de la órbita circular
3. Identifique para qué valores de k esta órbita es estable
4. Considerando que el punto r_0 es estable. Si a la masa se le pega una patadita que hace que oscile en torno a r_0, encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones ω_r

P2.-

Considere una partícula moviéndose en el potencial: $V(r) = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$.

1. Dado un momentum angular L, encuentre una ecuación para el radio de una órbita circular estable
2. La velocidad angular inicial define en parte el valor del momentum angular, ¿qué tan grande puede ser L para que no existan órbitas circulares?
3. Considerando la situación anterior, si r_0 es el radio de la órbita ciruclar en este caso límite, ¿cuál es el valor de $V_{\text{eff}}(r_0)$?

P3.- (Propuesto) Lindas trayectorias

Con una condición inicial específica se tiene que una partícula de masa m tiene un momentum angular conservado L. Considerando $E = 0$, encuentre la expresión de la energía potencial $V(r)$ para los siguientes casos de trayectorias espirales (con r y θ de coordenadas polares):

1. $r = r_0\theta^k$
2. $r = r_0 e^{a\theta}$
3. $r = r_0(1 + \theta)$

Auxiliar 12

Fuerzas centrales, órbitas y pequeñas oscilaciones

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Edgardo Rosas
Ayudantes: Felipe Cubillos, Alvaro Flores

P1.-

Una partícula de masa m se mueve en un espacio con un potencial descrito como $V(r) = \beta r^k$, con β y k constantes. Considere que se sabe que el momentum angular en un punto es L, responda/calcule:

1. ¿El momentum angular es constante?, ¿por qué?
2. Encuentre el radio r_0 de la órbita circular
3. Identifique para qué valores de k esta órbita es estable
4. Considerando que el radio r_0 es estable, si a la masa se le pega una patadita que hace que oscile en torno a r_0, encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones ω_r

Respuesta

Debido a que el potencial solo depende de la distancia de la masa al origen, al calcular el gradiente de este, para calcular la fuerza, solo sobrevive el término en $\hat{r}$. Tomando coordenadas esféricas:

$$\vec{F} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \cancelto{0}{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}}\hat{\theta} - \cancelto{0}{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}}\hat{\phi}$$
$$\Rightarrow \vec{F} = \beta k r^{k-1}\hat{r},$$

por lo que tenemos una fuerza central, y por ende, se conserva el momentum angular, ya que no hay fuerzas aplicándose en los ejes angulares.

Para encontrar el radio de la órbita circular usamos el potencial efectivo,

$$V_{eff}(r) = \beta r^k + \frac{L^2}{2mr^2},$$

que derivamos e igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}\right|_{r_0} = \beta k {r_0}^{k-1} - \frac{L^2}{m{r_0}^3} = 0$$
$$\Rightarrow r_0 = \left(\frac{L^2}{\beta k m}\right)^{\frac{1}{k+2}}.$$

Para analizar la estabilidad utilizamos la segunda derivada del potencial efectivo evaluada en r_0 con la expresión anterior,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r_0} &= \beta k(k-1){r_0}^{k-2} + \frac{3L^2}{m{r_0}^4}\\ &= \frac{1}{{r_0}^4}\frac{(k+2)L^2}{m},\end{aligned}$$

donde si $k > -2$ (por ejemplo, el potencial gravitatorio) la segunda derivada del potencial es positiva, así que el radio r_0 es estable y si $k < -2$ es inestable.

Para calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones usamos la fórmula de un auxiliar anterior,

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''(r_0)}{m}},$$

reemplazando la expresión de $V''(r_0)$ calculada anteriormente,

$$\omega_r = \frac{L}{m{r_0}^2}\sqrt{k+2}$$

Pauta Auxiliar ~~15~~ 12

100% real

~~P1~~ P3

La energía se describe como

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

así que derivamos la expresión de las trayectorias, además recordando que $mr^2\dot{\theta} = L$

1. $\frac{dr}{dt} = kr_0\theta^{k-1}\dot{\theta} = \frac{kr}{\theta}\frac{L}{mr^2} = \frac{kL}{mr}\frac{1}{\theta}$, donde $\theta = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/k} \Rightarrow \dot{r} = \frac{kL}{mr}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/k}$

   reemplazando en (1)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{kL}{mr}\right)^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/k} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow V(\vec{r}) = \frac{-L^2}{2mr^2}\left(k^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/k} + 1\right)$$

2. $\frac{dr}{dt} = ar_0e^{a\theta}\dot{\theta} = ar\frac{L}{mr^2} = \frac{aL}{mr} \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{aL}{mr}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0$

$$\Leftrightarrow V(\vec{r}) = -\frac{L^2}{2mr^2}\left(a^2 + 1\right)$$

3. $\frac{dr}{dt} = r_0\dot{\theta} = \frac{r_0L}{mr^2} \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0L}{mr^2}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(\vec{r}) = 0 \Rightarrow V(\vec{r}) = -\frac{L^2}{2mr^2}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + 1\right)$

~~P2~~ P2

Las órbitas circulares se dan en las posiciones de equilibrio, o sea, cuando $\partial V/\partial r = 0$, así que derivamos el potencial efectivo

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}\right|_{r_0} = 2\lambda^2 r_0 V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} - \frac{L^2}{mr_0^3} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow L^2 = 2m\lambda^2 r_0^4 V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} \quad (2)$$

con lo que conseguimos la ecuación que nos permitiría encontrar el radio r_0 de la órbita circular

Para encontrar el máximo valor de L t.q. se siga teniendo órbitas circulares, primero debe cumplir (2), donde notamos que el término $r_0^4e^{-\lambda^2r_0^2}$ tiende a 0 cuando $r_0 \to \infty$ (la exponencial le gana a r_0^4) y también cuando $r_0 \to 0$, por lo que debe existir un valor máximo de $r_0^4e^{-\lambda^2r^2}$, por lo tanto de L.

Derivamos e igualamos a 0 $r^4e^{-\lambda^2r^2}$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4e^{-\lambda^2r^2}\right)\right|_{r_0} = 4r_0^3e^{-\lambda^2r_0^2} - 2\lambda^2r_0^5e^{-\lambda^2r_0^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2r_0^3 - \lambda^2r_0^5 = 0 \Rightarrow r_0^2 = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow r_0^4 = \frac{4}{\lambda^4}$$

reemplazando en (2)

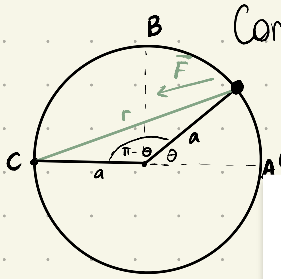
$$\Rightarrow L_{máx}^2 = 2m\lambda^2\frac{4}{\lambda^4}V_0e^{-\lambda^2\cdot 2/\lambda^2} = \frac{8mV_0e^{-2}}{\lambda^2} \quad (3)$$

que podemos reemplazar en la expresión del potencial efectivo

$$V_{eff}(\vec{r}_0) = \frac{L^2_{max}}{2mr_0^2} - V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} = \frac{8mV_0}{e^2\lambda^2}\cdot\frac{1}{2mr^2} - V_0 e^{-\lambda^2 r_0^2} = \frac{4V_0}{\lambda^2 e^2 r^2}$$

evaluando con $r_0^2 \Rightarrow V_{eff}(r_0) = \frac{4V_0}{\lambda^2 e^2}\frac{\lambda^2}{2} - \frac{V_0}{e^2} = \frac{V_0}{e^2}$

P3



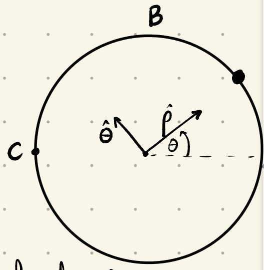
Como conocemos un ángulo y dos lados calculamos r con teorema del coseno

$$r^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos(\pi-\theta) = 2a^2(1-\cos(\pi-\theta)) = 2a^2(1+\cos(\theta)),$$

así que la fuerza, que es central dirigida siempre hacia C, sería

Elegimos nuestro ... n lo que

debemos desco...



... iguales

... θ/2

... magnitud

de la fuerza

Ahora, para calcu... por lo

que la fuerza ... nto, así

que no ejerce tr... que lo

calculamos inte...

$$W_{A\to B} = \int_{\vec r_0} F\cdot d\vec r = \int_{\vec r_0}\left(\frac{-k}{2a^2(1+\cos\theta)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat\rho + \frac{k}{2a^2(1+\cos\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\theta\right)\cdot a\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{-k}{2a^2(1+\cos\theta)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cancel{\hat\rho\cdot a\,d\theta\hat\theta} + \frac{k}{2a^2(1+\cos\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat\theta\cdot a\,d\theta\hat\theta$$

$$= \frac{k}{2a}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\theta/2)}{1+\cos\theta}\,d\theta \quad / \ \cos^2(\theta/2) = (1+\cos(\theta))/2$$

$$= \frac{k}{2a}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)}\,d\theta = \frac{k}{2a}\left.\frac{1}{\cos(\theta/2)}\right|_0^{\pi/2} = \frac{k}{2a}\left(\frac{1}{1/\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{k}{2a}(\sqrt{2}-1)$$

que es positivo, ya que la fuerza es en el sentido del movimiento.