Auxiliar 12

Órbitas y fuerzas centrales

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.-

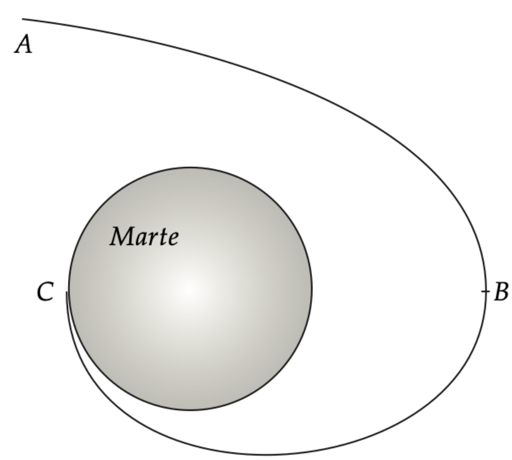
Una partícula de masa m se mueve en un espacio con un potencial descrito por $V(r) = \beta r^k$, con β y k constantes. Considere que se sabe que el momentum angular en un punto es L, responda/calcule:

1. ¿El momentum angular es constante?, ¿por qué?
2. Encuentre el radio r_0 de la órbita circular
3. Identifique para qué valores de k esta órbita es estable
4. Considerando que el punto r_0 es estable. Si a la masa se le pega una patadita que hace que oscile en torno a r_0, encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones ω_r

P2.-

Una nave de masa m se aproxima a Marte (de masa M) en una órbita AB parabólica. Cuando la nave alcanza el punto B de mínima distancia a Marte, frena usando sus cohetes y pasa a una órbita elíptica tan bien calculada que 'amartiza' en un punto C, opuesto a B, en forma tangencial. Los datos son m, M, r_B y el radio R_M de Marte. Obtenga:

1. La velocidad de la nave en B justo antes de frenar.
2. La energía cuando la nave está en su órbita elíptica.
3. La velocidad con que llega C.



Auxiliar 12

Órbitas y fuerzas centrales

Profesor: Patricio Aceituno
Auxiliares: Javier Huenupi, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

P1.-

Una partícula de masa m se mueve en un espacio con un potencial descrito como $V(r) = \beta r^k$, con β y k constantes. Considere que se sabe que el momentum angular en un punto es L, responda/calcule:

1. ¿El momentum angular es constante?, ¿por qué?
2. Encuentre el radio r_0 de la órbita circular
3. Identifique para qué valores de k esta órbita es estable
4. Considerando que el radio r_0 es estable, si a la masa se le pega una patadita que hace que oscile en torno a r_0, encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones ω_r

Respuesta

Debido a que el potencial solo depende de la distancia de la masa al origen, al calcular el gradiente de este, para calcular la fuerza, solo sobrevive el término en $\hat{r}$. Tomando coordenadas esféricas:

$$\vec{F} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \cancelto{0}{\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}}\hat{\theta} - \cancelto{0}{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}}\hat{\phi}$$
$$\Rightarrow \vec{F} = \beta k r^{k-1}\hat{r},$$

por lo que tenemos una fuerza central, y por ende, se conserva el momentum angular, ya que no hay fuerzas aplicándose en los ejes angulares.

Para encontrar el radio de la órbita circular usamos el potencial efectivo,

$$V_{eff}(r) = \beta r^k + \frac{L^2}{2mr^2},$$

que derivamos e igualamos a cero para encontrar los puntos críticos,

$$\left.\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}\right|_{r_0} = \beta k {r_0}^{k-1} - \frac{L^2}{m{r_0}^3} = 0$$
$$\Rightarrow r_0 = \left(\frac{L^2}{\beta k m}\right)^{\frac{1}{k+2}}.$$

Para analizar la estabilidad utilizamos la segunda derivada del potencial efectivo evaluada en r_0 con la expresión anterior,

$$\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r_0} = \beta k(k-1){r_0}^{k-2} + \frac{3L^2}{m{r_0}^4}$$
$$= \frac{1}{{r_0}^4}\frac{(k+2)L^2}{m},$$

donde si $k > -2$ (por ejemplo, el potencial gravitatorio) la segunda derivada del potencial es positiva, así que el radio r_0 es estable y si $k < -2$ es inestable.

Para calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones usamos la fórmula de un auxiliar anterior,

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''(r_0)}{m}},$$

reemplazando la expresión de $V''(r_0)$ calculada anteriormente,

$$\omega_r = \frac{L}{m{r_0}^2}\sqrt{k+2}$$

P2.-

Una nave de masa m se aproxima a Marte (de masa M) en una órbita AB parabólica. Cuando la nave alcanza el punto B de mínima distancia a Marte, frena usando sus cohetes y pasa a una órbita elíptica tan bien calculada que 'amartiza' en un punto C, opuesto a B, en forma tangencial. Los datos son m, M, r_B y el radio R_M de Marte. Obtenga:

1. La velocidad de la nave en B justo antes de frenar.
2. La energía cuando la nave está en su órbita elíptica.
3. La velocidad con que llega C.

Respuesta

Órbitas y energía

La excentricidad de la órbita se puede expresar en función de la energía mecánica,

$$e^2 = 1 + R\left(\frac{2E_r}{GM\mu}\right),$$

por lo que tenemos 3 casos:

- $E_r = -\frac{1}{2}G\frac{M\mu}{R} \Rightarrow e = 0$, una órbita circular.
- $E_r = 0 \Rightarrow e = 1$, órbita parabólica.
- $E_r > 0 \Rightarrow e > 1$, órbita hiperbólica.

Como la masa parte con una órbita parabólica, $E_r = 0$ y expresandola con la energía cinética y potencial:

$$E = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{GmM}{r_B} = 0$$
$$\Rightarrow {v_B}^2 = \frac{2GM}{r_B}.$$

En los tramos en los que no hay aceleración, se conserva el momentum angular, con lo que nos podemos quitar la velocidad angular de la expresión de la velocidad en coordenadas polares. Como no tenemos fuerzas en el eje $\hat{\phi}$, se tiene la ecuación escalar proveniente de segunda Ley de Newton,

$$m\rho^2\dot{\phi} = l$$
$$\Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{m^2\rho^4},$$

donde l es el momentum angular. Por lo que, reemplazando $\dot{\phi}^2$, la expresión de la energía en en trayecto desde B hasta C se puede escribir como:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) - \frac{GmM}{\rho}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{l^2}{2m\rho^2} - \frac{GmM}{\rho}.$$

Para seguir con el cálculo tenemos que notar que $\dot{\rho}$ es 0 en los puntos B y C, esto ya que son el punto más lejano y más cercano respectivamente, por lo que la masa no tiene más velocidad parar seguir más lejos y más cerca, respectivamente. Ahora como después del frenado con cohetes justo antes de alcanzar el punto B, no hay fuerzas externas, se conserva la energía mecánica, así que tenemos:

$$E_B = E_C$$
$$\Leftrightarrow \frac{l^2}{2m{r_B}^2} - \frac{GmM}{r_B} = \frac{l^2}{2m{R_M}^2} - \frac{GmM}{R_M}$$
$$\Rightarrow l^2 = \frac{2Gm^2Mr_BR_M}{R_M + r_B},$$

reemplazando esta expresión del momentum angular, ya sea en la energía en B o en C, se obtiene,

$$E_B = \frac{2Gm^2Mr_BR_M}{2m{r_B}^2(R_M + r_B)} - \frac{GmM}{r_B}$$
$$= -\frac{GmM}{R_M + r_B} = E_C$$

Como en el punto C, la superficie de Marte, la velocidad tangencial es perpendicular al vector $\vec{\rho}$, tenemos que el momentum angular, $\vec{l} = m\vec{\rho} \times \vec{v}$, en el punto C es $l = mR_Mv_c$ que usamos para despejar la velocidad.

$$\Rightarrow mR_M v_c = \sqrt{\frac{2Gm^2Mr_BR_M}{R_M + r_B}}$$
$$\Leftrightarrow {v_c}^2 = \frac{2GMr_B}{mR_M(R_M + r_B)},$$

como no hay velocidad radial, la velocidad tangencial es toda la velocidad que hay en este punto.