Auxiliar 11

Energía II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.- P2 Control 2 2014

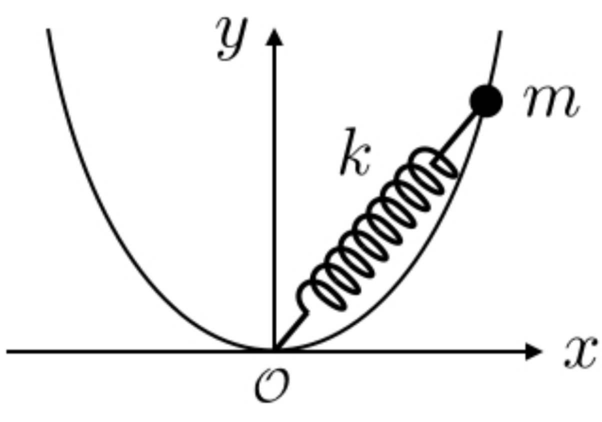
Un anillo de masa m puede deslizar sin roce por un alambre parabólico dado por $y = x^2/x_0$ (ver figura). El anillo está unido a un resorte ideal de constante k, largo natural nulo ($l_0 = 0$), y sujeto al punto $\mathcal{O}$. Además de la fuerza del resorte $\vec{F}_R$ y de la fuerza ejercida por el alambre $\vec{F}_A$, sobre el anillo actúa una fuerza externa $\vec{F}_E$ dada por:

$$\vec{F}_E = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{\imath} + \frac{3x_0}{4}y\hat{\jmath}\right) .$$

a) Identifique las fuerzas y cuáles de estas realizan trabajo. Justifique su respuesta.

b) Encuentre el **trabajo total** que se realiza sobre el anillo cuando este se mueve desde $x = x_0$ hasta $x = \lambda x_0$ con λ arbitrario

c) Encuentre todos los puntos en que el anillo posee la misma rapidez que la que tiene al pasar por el punto $x = x_0$



Formulario

Energía

La energía mecánica de un sistema de una partícula es igual a la suma de su energía cinética K y su energía potencial U

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ &= \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + U\,, \end{aligned}$$

donde $|\vec{v}|$ es la rapidez de la partícula en el sistema de coordenadas que hayan elegido.

Trabajo

El trabajo ejercido por una fuerza se describe como la fuerza integrada a lo largo de la trayectoria de la partícula

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}\,)\cdot \mathrm{d}\vec{r}\,,$$

con $\mathrm{d}\vec{r}$ el diferencial del vector posición.
El trabajo hecho por **la suma de todas las fuerzas NO conservativas** nos da la diferencia de energía mecánica

$$E_B - E_A = W^{\mathrm{NC}}_{A\to B}.$$

El trabajo realizado por una **fuerza conservativa** $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ se puede calcular con

$$W^{\mathrm{C}}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\mathrm{C}}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(r_A) - U(r_B)\,,$$

donde U es el potencial asociado a $\vec{F}_C$, o sea que están relacionados como $\vec{F}_C = -\nabla U$.
Además, el **trabajo total** (considerando tanto fuerzas conservativas como no conservativas) se puede calcular como

$$W^{\mathrm{tot}}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{\mathrm{tot}}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = K(r_B) - K(r_A)\,.$$

Conservación de la energía

Si tenemos que $W^{\mathrm{NC}} = 0$ se conserva la energía mecánica, o sea

$$\begin{aligned} E_0 &= E_f \\ \Leftrightarrow K_0 + U_0 &= K_f + U_f. \end{aligned}$$

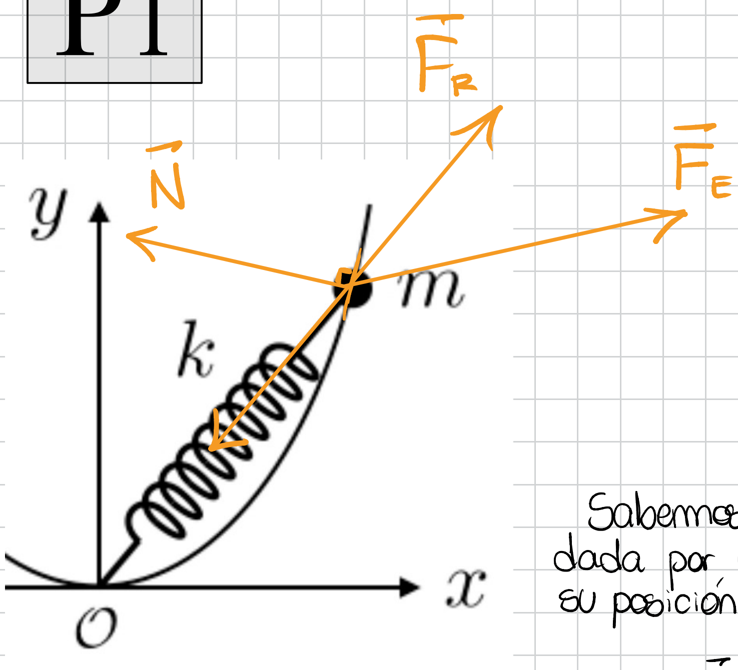
Esto sucede si es que las fuerzas no conservativas no hacen trabajo y/o solo tenemos fuerzas conservativas. En general, una fuerza es conservativa si su rotor es 0

$$\nabla\times\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla U\,.$$

Ojo que una fuerza conservativa **sí** puede ejercer trabajo.

Auxiliar 11

P1



a) No tenemos $\vec{g}$, así que no hay fuerza peso. Las únicas fuerzas actuando sobre m son:

- Resorte $\vec{F}_R$
- Normal $\vec{N}$
- Fuerza externa $\vec{F}_E$

Sabemos que la partícula se mueve siguiendo una parábola dada por la forma del alambre, así que podemos escribir su posición en cartesianas como

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + \frac{x^2}{x_0}\hat{\jmath} \quad (1)$$

y por la def. de trabajo

$$W_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \quad (2)$$

sabemos que no ejercen trabajo las fuerzas que son perpendiculares a la trayectoria, ya que si $\vec{F} \perp \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0 \qquad \forall \vec{r} \in [\vec{r}_A, \vec{r}_B]$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = 0$$

Por la expresión de nuestras fuerzas tenemos que $\vec{N} \perp \vec{r}$, mientras que $\vec{F}_R$ y $\vec{F}_E$ no son perpendiculares a la trayectoria

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_R \text{ y } \vec{F}_E \text{ realizan trabajo}}$$

b) Sabemos que $\vec{F}_R$ es conservativa al ser central, por lo que no necesitamos usar (2) para calcular su trabajo, sino que ocuparemos

$$W^{c}_{A\to B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}^{c}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \quad (3)$$

donde $\vec{F}^c = \vec{F}_R$ y $U(\vec{r}) = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + \frac{x^4}{x_0^2}} - \cancel{l_0}^{=0}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x^2 + \frac{x^4}{x_0^2}\right)$

Debemos definir los límites de integración, en este caso

$$\vec{r}_A = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} = x_0\hat{\imath} + x_0\hat{\jmath} \qquad \text{y} \qquad \vec{r}_B = x_f\hat{\imath} + y_f\hat{\jmath} = \lambda x_0\hat{\imath} + \lambda^2 x_0\hat{\jmath}$$

y reemplazando en $U(\vec{r})$

- $U(x=x_0) = kx_0^2$
- $U(x=\lambda x_0) = \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2$

y ocupando (3)

$$\Rightarrow W^R_{x_0\to\lambda x_0} = U(x_0) - U(\lambda x_0) = kx_0^2 - \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2 \qquad (4)$$

Mientras que para $\vec{F}_E$ ocuparemos directamente (2)

$$\vec{F}_E(x,y) = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{\imath} + \frac{3}{4}x_0 y\hat{\jmath}\right)$$

$$= \frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}\hat{\imath} + \frac{3}{4}x^2\hat{\jmath}\right)$$

Calculamos el diferencial de posición con (1)

$$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + 2\frac{x}{x_0}dx\hat{\jmath}$$

y reemplazando en (2)

$$\Rightarrow W^E_{x_0\to\lambda x_0} = \int_{x_0}^{\lambda x_0}\vec{F}_E(x)\cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^{\lambda x_0}\frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}\hat{\imath} + \frac{3}{4}x^2\hat{\jmath}\right)\cdot\left(dx\hat{\imath} + 2\frac{x}{x_0}dx\hat{\jmath}\right)$$

$$= \frac{k}{x_0}\int_{x_0}^{\lambda x_0}\left(\frac{x^3}{x_0} + \frac{3}{2}\frac{x^3}{x_0}\right)dx$$

$$= \frac{5}{2}\frac{k}{x_0^2}\int_{x_0}^{\lambda x_0}x^3dx$$

$$= \frac{5}{8}k(\lambda^4 - 1)x_0^2 \qquad (5)$$

Juntando (4) con (5) obtenemos el trabajo total

$$W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} = W^R_{x_0\to\lambda x_0} + W^E_{x_0\to\lambda x_0} = kx_0^2 - \frac{1}{2}k(\lambda^2+\lambda^4)x_0^2 + \frac{5}{8}k(\lambda^4-1)x_0^2$$

$$= \boxed{\frac{3}{8}kx_0^2 - \frac{1}{2}k\lambda^2x_0^2 + \frac{1}{8}k\lambda^4x_0^2} \qquad (6)$$

c) Que la partícula vuelva a tener la rapidez que tenía en x_0 es lo mismo que vuelva a tener la misma energía cinética $K(x=x_0)$, o sea queremos

$$K(x_0) \stackrel{!}{=} K(x_f)$$

Revisando el formulario notamos que

$$W^{tot}_{A\to B} = K(\vec{r}_B) - K(\vec{r}_A)$$

y en **b)** ya calculamos $W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0}$ para un λ cualquiera, así que si imponemos nuestra condición

$$K(x_0) \overset{!}{=} K(\lambda x_0)$$

es equivalente a imponer $W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} \overset{!}{=} 0$, de donde podemos despejar λ. Igualemos a 0 la expresión de (6)

$$W^{tot}_{x_0\to\lambda x_0} = \frac{3}{8}kx_0^2 - \frac{1}{2}k\lambda^2x_0^2 + \frac{1}{8}k\lambda^4x_0^2 \overset{!}{=} 0$$

y si definimos $\tilde{\lambda} := \lambda^2$ obtenemos una ec. cuadrática

$$\tilde{\lambda}^2 - 4\tilde{\lambda} + 3 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = 3 \text{ o } 1$$

$$\Rightarrow \lambda \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, -1\}$$

así que la partícula tiene la misma rapidez en $x = \{\sqrt{3}x_0, -\sqrt{3}x_0, x_0, -x_0\}$