Auxiliar 11

Roces y Ley de Hooke

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi
Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.- Solución oscilador amortiguado

Resuelva la ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado, o sea, encuentre $x = x(t)$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

Considere el caso específico $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ y considere que en el tiempo inicial $t = 0$ la partícula está en la posición x_0 y se le imprime una velocidad $\dot{x}_0$.

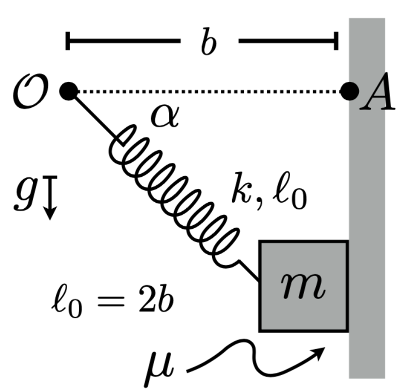
P2.-

Un partícula de masa m desliza por una pared vertical empujada por un resorte de constante elástica k. EL otro extremo está fijo en el punto $\mathcal{O}$, tal como muestra la figura. La distancia entre $\mathcal{O}$ y la pared es b (distancia $\mathcal{O}A$) y el largo natural del resorte es l_0. Entre la partícula y la pared existe un roce caracterizado por el coeficiente μ (cinético y estático). Considere para sus cálculos $l_0 = 2b$ y $k = 2mg/b$

a) ¿Qué condición debe cumplir μ tal que al dejar la partícula en reposo en el punto A, esta comience a descender?

b) Si μ cumple la condición de a) y la partícula es liberada desde el reposo en el punto A, determine la magnitud de la normal que la pared ejerce sobre la partícula en función del ángulo α.

c) Indique el ángulo α^* en que la partícula se separa de la pared

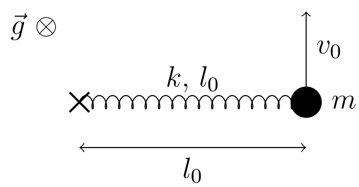


P3.-

Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0. En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural.

a) Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$.

b) [**Propuesto**] Determine también la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.



Formulario

Fuerza de roce estático

La fuerza de roce estático se ejerce de forma perpendicular a la superficie que genera el roce. La condición para que una partícula **no se mueva** sobre una superficie con coeficiente de roce estático μ, es:

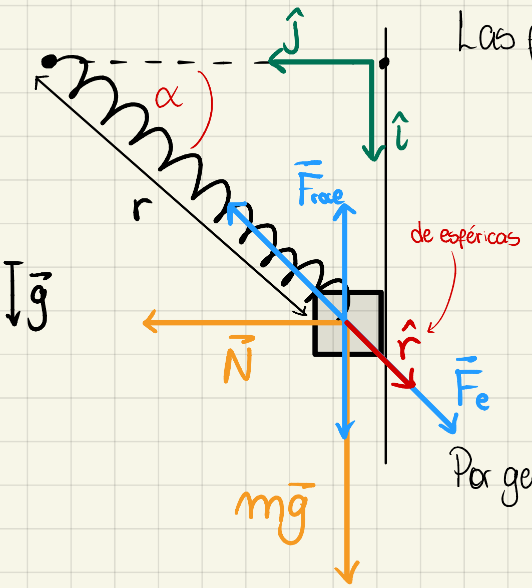
$$\Big| \sum_{i \neq \text{roce}} F_i \Big| < \mu |\vec{N}| \,,$$

donde F_i son las componentes (perpendiculares a la superficie) de las fuerzas actuando sobre la partícula, sin considerar la fuerza de roce estático.

Auxiliar 11

P1

Mientras la masa no se despegue de la pared, esta se moverá solo en una dirección, por lo que usaremo coord cartesianas



Las fuerzas involucradas son

* El sentido de las fuerzas en azul dependen de la posición de la partícula. Lo que no cambia es la dirección

▷ Normal: $\vec{N} = N\hat{j}$

▷ Peso: $\vec{P} = mg\hat{\imath}$

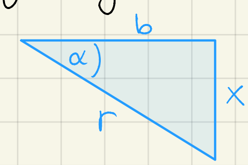
la distancia de O a la partícula

▷ Fuerza resorte: $\vec{F}_R = -k(r-l_0)\sin\alpha\,\hat{\imath} + k(r-l_0)\cos\alpha\,\hat{j}$ * Ver apéndice para saber cómo se llegó a esto

▷ Roce estático: $\vec{F}_{roce} = F_{roce}\,\hat{\imath}$

Por geometría $r^2 = b^2 + x^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+b^2}$ y el ángulo α está dado por

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{x}{b}$$



Como la aceleración es $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{k}$, la Segunda Ley de Newton nos queda

$$m\ddot{x}\hat{\imath} + \cancel{m\ddot{y}}^{\,0}\hat{j} = N\hat{j} + mg\hat{\imath} - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha\,\hat{\imath} + k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\cos\alpha\,\hat{j} + F_{roce}\,\hat{\imath}$$

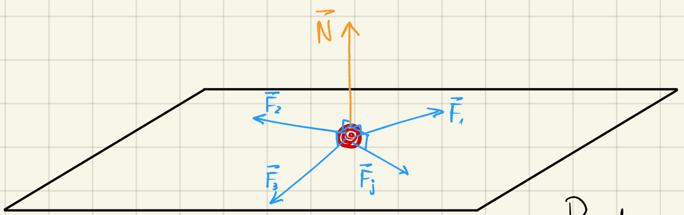
$\hat{\imath}$) $m\ddot{x} = mg - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha + F_{roce}$

$\hat{j}$) $0 = N + k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\cos\alpha \Rightarrow N = -k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\cos\alpha$ (1)

Ahora, la fuerza F_{roce} varía según las otras fuerzas (o sus componentes) en su misma dirección, eje x. Si un objeto no se mueve debido a una fuerza de roce estático, se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_i F_i\right| < \mu|N|$$

donde F_i son todas las fuerzas sobre la partícula actuando en el plano perpendicular a la normal (ver dibujo)



En este caso, las fuerzas F_i serían

$$\sum_i F_i = mg - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha \quad \Big\}\ \text{las que van en } \hat{\imath}$$

Por lo que la condición de no movimiento se tiene ssi

$$\left|mg - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha\right| < \mu|N|$$

$$\Rightarrow \left|mg - k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\sin\alpha\right| < \mu\left|-k\left(\sqrt{x^2+b^2} - l_0\right)\cos\alpha\right|$$

Pero a nosotros nos interesa el valor justo de μ t.q. la masa se comienze a mover, por lo que tomamos la igualdad y evaluamos en $x=0 \Rightarrow \alpha = 0$

pasa de $<$ a $=$

$$\Rightarrow |mg - k(b-l_0)\sin\alpha| = \mu|-k(b-l_0)|$$

$l_0 = 2b$ por enunciado

$$\Leftrightarrow mg = \mu k b$$

$k = \frac{2mg}{b}$ por enunciado

$$\Leftrightarrow mg = 2mg\mu$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$$

b) Por (1) tenemos que $N = -k(\sqrt{x^2+b^2} - l_0)\cos\alpha$

$$= -\frac{2mg}{b}\left(b\sqrt{(x/b)^2+1} - 2b\right)\cos\alpha$$

$$= -2mg\left(\sqrt{(x/b)^2+1} - 2\right)\cos\alpha$$

y por geometría tenemos que $\frac{x}{b} = \tan\alpha$

$$\Rightarrow N = -2mg\left(\sqrt{\tan^2\alpha + 1} - 2\right)\cos\alpha$$

$$= -2mg\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2\right)\cos\alpha$$ (todo en función de α)

Para imponer que la partícula se separa, hacemos $N(\alpha^*) \overset{!}{=} 0$, tenemos dos opciones:

$\frac{1}{\cos\alpha^*} - 2 = 0$	$\cos\alpha^* = 0$
$\Leftrightarrow \cos\alpha^* = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \alpha^* = \pi/3$	$\Rightarrow \alpha^* = \pi/2$

$\therefore$ Se despega para $\alpha^* = \pi/3$ al ser más chico que $\pi/2$

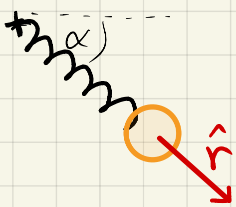
Apéndice: Descomponer la fuerza elástica

Olvidémonos por un momento que está la pared y la gravedad, esto para enfocarnos solo en la fuerza elástica.

Como la fuerza que ejerce un resorte está contenida completamente en la dirección del resorte, ocupamos esféricas y la fuerza elástica estaría dada por

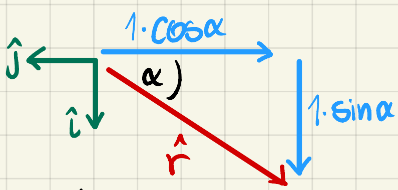
$$\vec{F}_e = -k(r - l_0)\hat{r} \quad (1)$$

(piensen en el caso 1D)



Esta expresión siempre es válida cuando tengamos una partícula atada solo a un resorte.
Ahora, deseamos expresar esta fuerza en cartesianas (ya que ocupamos cartesianas en la pregunta) por lo que basta descomponer el vector unitario $\hat{r}$ en función de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$

Entonces, por el dibujo de la derecha vamos a tener que $\hat{r}$ está dado por



$$\hat{r} = \underline{\sin\alpha\,\hat{\imath} - \cos\alpha\,\hat{\jmath}} \quad (2)$$

donde el módulo de $\hat{r}$ es $|\hat{r}| = 1$ al ser unitario (este es el 1 que está multiplicando al $\sin\alpha$ y al $\cos\alpha$) y los signos se los doy según cómo definí mi $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

Entonces, al reemplazar en (1) nos queda

$$\vec{F}_e = -k(r - l_0)\underbrace{(\sin\alpha\,\hat{\imath} - \cos\alpha\,\hat{\jmath})}_{(2)} = -k(r - l_0)\sin\alpha\,\hat{\imath} + k(r - l_0)\cos\alpha\,\hat{\jmath}$$

Esta expresión es válida $\forall r$, el cambio de sentido de la fuerza te lo da automáticamente la diferencia $r - l_0$

* Ojo: Con no reemplazar con las "fórmulas" para descomponer $\hat{r}$ en $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, ya que esas fórmulas dependen de dónde se definió el ángulo. Así que hagan la descomposición a mano como mostré aquí.

P2

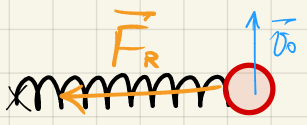


Fig 1: Vista de arriba

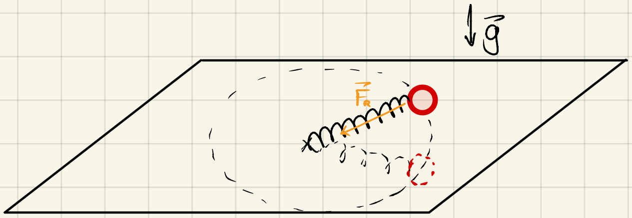


Fig2: Vista de lado

Tenemos 3 fuerzas

- Elástica: $\vec{F}_R = -k(\rho - l_0)\hat{\rho}$
- Peso: $\vec{P} = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N\hat{k}$

Ocupamos cilíndricas

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} + \cancel{\ddot{z}}\hat{k}$$

donde $z = 0 = cte \Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$. Segunda Ley de Newton queda como

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -k(\rho - l_0)\hat{\rho} - mg\hat{k} + N\hat{k}$$

$\hat{\rho})$ $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -k(\rho - l_0)$

$\hat{\phi})$ $\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0$

$\hat{k})$ $0 = -mg + N$

No podemos integrar $\hat{\rho})$, por lo que ocupamos $\hat{\phi})$

$\hat{\phi}$: $\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow \rho^2 \cdot \dot{\phi} = cte$, en particular igual a la condición inicial

$$\Rightarrow \rho^2\dot{\phi} = \rho_0^2\dot{\phi}_0 = \rho_0 \cdot (\rho_0\dot{\phi}_0) \quad (1)$$

donde notamos que este término aparece en la velocidad inicial

$$\vec{v}(t=0) = \cancel{\dot{\rho}_0}\hat{\rho} + \rho_0\dot{\phi}_0\hat{\phi} = \vec{v}_0 = \underbrace{v_0\hat{\phi}}_{\text{por enunciado}}$$

$$\Rightarrow \rho_0\dot{\phi}_0 = v_0$$

y por enunciado $\rho_0 = l_0$, así que (1) queda como

$$\rho^2\dot{\phi} = l_0 \cdot v_0 \Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{l_0 v_0}{\rho^2}$$, reemplazando en $\hat{\rho})$

$$\hat{\rho}) \Rightarrow m\ddot{\rho} - m\rho\frac{l_0^2 v_0^2}{\rho^4} = -k(\rho - l_0)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\rho} = \frac{l_0^2 v_0^2}{\rho^3} - \frac{k}{m}\rho + \frac{k l_0}{m} \quad (2)$$

ahora si podemos integrar con truco de mecánica

$$(2): \int_0^{\dot{\rho}} \dot{\rho}\, d\dot{\rho} = l_0^2 v_0^2 \int_{l_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^3} - \frac{k}{m}\int_{l_0}^{\rho} \rho\, d\rho + \frac{k l_0}{m}\int_{l_0}^{\rho} d\rho \quad , \quad \rho(t=0) = l_0 \wedge \dot{\rho}(t=0) = 0$$

por enunciado

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2} = -\frac{l_0^2 v_0^2}{2} \frac{1}{\rho^2}\Big|_{l_0}^{\rho} - \frac{k}{m}\frac{\rho^2}{2}\Big|_{l_0}^{\rho} + \frac{k l_0}{m}\rho\Big|_{l_0}^{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}^2}{2} = -\frac{l_0^2 v_0^2}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{l_0^2}\right) - \frac{k}{2m}\left(\rho^2 - l_0^2\right) + \frac{k l_0}{m}(\rho - l_0) \quad (3)$$

Ahora, queremos imponer que la longitud máxima sea $4l_0$, como queremos maximizar ρ debemos imponer que su derivada sea 0, o sea usamos (3) t.q. $\dot{\rho}(\rho = 4l_0) \overset{!}{=} 0$

$$(3) \Rightarrow 0 = -\frac{l_0^2 v_0^2}{2}\left(\frac{1}{16 l_0^2} - \frac{1}{l_0^2}\right) - \frac{k}{2m}\left(16 l_0^2 - l_0^2\right) + \frac{k l_0}{m}(4 l_0 - l_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2 l_0^2}{2} \cdot \frac{-15}{16 l_0^2} = -\frac{k}{2m} 15 l_0^2 + \frac{k l_0}{m} 3 l_0$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{16 l_0^2 k}{m} - \frac{32 l_0^2 k}{5m}}$$

$$= \sqrt{\frac{58 l_0^2 k}{5}} \quad \text{creo}$$

b) Pueden hacerlo con conservación de la energía mecánica