Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3111 – Mecánica Clásica

Auxiliar 10

Hamiltoniano II

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Movimiento armónico

Determine las transformaciones canónicas definidas por las siguientes funciones generadoras:

a) Escriba las ecuaciones de movimiento para un oscilador armónico con frecuencia $\omega(t)$, en función de las variables Q y P, usando la función generadora

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\omega(t) q^2 \cot Q$$

b) Escriba las ecuaciones de movimiento para un oscilador armónico (con ω constante) sobre el cual actúa una fuerza externa $f(t)$, en función de Q y P, usando la función generadora

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\omega \left[q - \frac{f(t)}{m\omega^2} \right] \cot Q$$

P2.- Oscilador anarmónico, again

Considere pequeñas oscilaciones para un oscilador anarmónico cuyo Hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 x^2\right) + \alpha x^3 + \beta x p^2$$

bajo la condición que $|\alpha x| \ll \omega^2$. $|\beta x| \ll 1$. Encuentre los parámetros a y b para la tranformación canónica producida por la función generadora

$$\Phi = xP + ax^2 P + bP^3$$

tal que el nuevo Hamiltoniano no contenga ningún término anarmónico a primer orden en $\alpha\omega^{-2}Q$ y βQ. Encuentre $x(t)$

Formulario

Ecuaciones de Hamilton

A partir de un Lagrangiano L en función de las coordenadas y velocidades, q_i, $\dot{q}_i$, los momentum conjugados se calculan como

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,.$$

A partir de los momentum, el Hamiltoniano H del sistema se calcula como

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\,,$$

donde los $\dot{q}_i$ se expresan función de los momentum $\{p_j\}$.

El simil de las ecuaciones de Euler-Lagrange de mecánica Lagrangiana, en mecánica Hamiltoniana son las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \wedge \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Las cuatro transformaciones canónicas básicas son:

$$\begin{aligned}
F = F_1(q, Q, t) &\Rightarrow p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad \wedge \quad P_i = -\frac{F_1}{Q_i} \\
F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i &\Rightarrow p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \wedge \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\
F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i &\Rightarrow q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad \wedge \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\
F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i &\Rightarrow q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad \wedge \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}
\end{aligned}$$

Auxiliar 10

P1

a) En el auxiliar anterior obtuvimos el Hamiltoniano de un M.A.S.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{1}{2m}[p^2 + m^2\omega^2 q^2]$$

donde notamos que si hacemos una transformación de la forma

$$p = f(P)\cos Q \quad \wedge \quad q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q \quad (*)$$

y reemplazamos en el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}[f^2(P)\cos^2 Q + f^2(P)\sin^2 Q] = \frac{f(P)^2}{2m}$$

donde Q ahora sería una coordenada cíclica y las ecs. de Hamilton sería trivial, así que busquemos una forma de obtener una transformación canónica con estas características.

Nos dicen que ocupemos la fn generadora

$$F(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$$

que solo depende de q y Q, así que viendo la Tabla del formulario, sabemos que las transf. canónicas están dadas por

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad (1) \quad \wedge \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2}m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} \quad (2)$$

pero queremos obtener $q = q(Q, P)$ y $p = p(Q, P)$, así que despejemos q de (2)

$$\Rightarrow q(Q, P) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \quad (3)$$

y reemplazando en (1)

$$\Rightarrow p(Q, P) = \sqrt{2Pm\omega}\cos Q \quad (4)$$

con lo que conseguimos expresiones como $(*)$ $\Rightarrow f(P) = \sqrt{2Pm\omega}$, así que H sería

$$H(Q, P) = P\omega$$

Ya que $F(q, Q)$ no depende explícitamente del tiempo, $\partial_t F = 0$, entonces $K = H$ y las EoMs serían

- $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$
- $\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0$

y las sols. serían:

- $Q(t) = \omega t + Q_0$
- $P = P_0$

y reemplazando en (3) y (4)

$$\Rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\, \sin(\omega t + Q_0) \qquad p(Q,P) = \sqrt{2P_0 m\omega}\, \cos(\omega t + Q_0)$$

y renombrando las ctes. por estética

$$\therefore \quad \boxed{q(t) = A\cos(\omega t)} \quad \wedge \quad \boxed{p(t) = -m\omega A\sin(\omega t)}$$

donde se tomó $Q_0 = \phi$ un desfase que podemos elegir como $\phi \overset{!}{=} \pi/2$

b) Tendríamos lo mismo que antes, solo cambiarían las EoMs, ya que ahora la fn generadora depende explícitamente del tiempo

La función K sería

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = P\omega(t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} m\omega(t) q^2 \cot Q\right)$$

$$= P\omega(t) + \frac{1}{2} m\dot{\omega}\, q^2 \cot Q$$

$$= P\omega(t) + \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} P \sin Q \cos Q$$

así que las ecs. de Hamilton serían

- $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega(t) + \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \sin Q \cos Q$
- $\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} P(\cos^2 Q - \sin^2 Q)$

Notamos que si tomamos $\omega(t) = \omega$ cte. obtenemos lo mismo de antes

P2

Usamos una función generadora de segundo tipo

$$F_2(x,P,t) = \Phi(x,P) = xP + ax^2P + bP^3$$

de segundo tipo, $F_2(q,P)$

entonces tenemos que las transformaciones canónicas están dadas por:

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = P + 2axP \quad (1) \qquad \wedge \qquad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P} = x + ax^2 + 3bP \quad (2)$$

Ahora, necesitamos encontrar x, p en función únicamente de Q, P, así que deberíamos despejar x de (2) y obtener $x = x(Q,P)$ y luego reemplazar en (1) para encontrar $p = p(Q,P)$.

Entonces es recomendable comenzar a aproximar, ya que (2) es una ec. cuadrática en x. Tenemos

podemos tomar cualquiera

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 12abP + 4aQ}}{2a} = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} - \frac{3bP}{a} + \frac{Q}{a}}$$

expandimos en Taylor c/r a $a = 0$ hasta primer orden

con signo +

$$x_1 = \underbrace{Q - 3bP}_{\mathcal{O}(a^0)} - \underbrace{(3bP - Q)^2 a}_{\mathcal{O}(a^1)} + \underbrace{\mathcal{O}(a^2)}_{\mathcal{O}(a^2)} = Q - 3bP - 9ab^2P^2 + 6abPQ - aQ^2 + \cancel{\mathcal{O}(a^2)}^{\sim 0}$$

y es fácil notar que si también b es pequeño, los términos ab^2 y ab son despreciables

$$\Rightarrow x \approx \underbrace{Q}_{\mathcal{O}(a^0b^0)} - \underbrace{aQ^2}_{\mathcal{O}(a^1b^0)} - \underbrace{3bP}_{\mathcal{O}(a^0b^1)} \quad (3)$$

} orden $\mathcal{O}(a^n b^m)$ con $n+m \leq 1$

así que reemplazando este x en p, usamos sólo $x \approx Q$

$$\Rightarrow p \approx P + 2aQP \quad (4)$$

Entonces, el Hamiltoniano escrito en estas nuevas variables sería

$$H(Q,P) \approx \frac{1}{2}\left([P + 2aQP]^2 + \omega^2[Q - aQ^2 - 3bP^2]^2 \right) + \alpha[Q - aQ^2 - 3bP^2]^3 + \beta[Q - aQ^2 - 3bP^2][P + 2aQP]^2$$

y sólo consideraremos hasta orden 3 en Q, P (Q^nP^m t.q. $n+m \leq 3$)

$$= \frac{1}{2}\left(P^2 + 4aQP^2 + \omega^2[Q^2 - 2aQ^3 - 6bQP^2] \right) + \alpha[Q^3] + \beta[QP^2] + \mathcal{O}(\geq 4)$$

} orden $\mathcal{O}(a^n b^m \alpha^\sigma \beta^\gamma)$ con $n+m+\sigma+\gamma \leq 1$

$$\approx \frac{1}{2}(P^2 + \omega^2 Q^2) + [-a\omega^2 + \alpha]Q^3 + [2a - 3\omega^2 b + \beta]QP^2$$

Tenemos total libertad de elegir a y b como queramos, entonces los elegimos para matar los términos anarmónicos de este Hamiltoniano

$$-a\omega^2 + \alpha \stackrel{!}{=} 0 \qquad \wedge \qquad 2a - 3\omega^2 b + \beta \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \alpha/\omega^2} \Rightarrow \boxed{3b\omega^2 = \beta + \frac{2\alpha}{\omega^2}}$$

de esta forma, ahora el Hamiltoniano sería

$$H(Q,P) = \frac{1}{2}\left(P^2 + \omega^2 Q^2\right)$$

que es el Hamiltoniano de un M.A.S. de toda la vida, que podemos resolver con ec de Hamilton donde tenemos

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \quad , \text{ ya que } \Phi = F_2 \text{ no depende explícitamente del tiempo}$$

- $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = P$
- $\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\omega^2 Q$

$$\Rightarrow \ddot{Q} = \dot{P} = -\omega^2 Q \Rightarrow \boxed{Q = A\cos(\omega t)} \Rightarrow \dot{P} = -\omega^2 A\cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{P = -\omega A\sin(\omega t)}$$

y reemplazamos en las expresiones (3) y (4)

- $p = P + 2aQP = -\omega A\sin(\omega t) - 2\omega a(\alpha,\omega) A^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t)$
- $x = Q - aQ^2 - 3bP^2 = A\cos(\omega t) - aA^2\cos^2(\omega t) - 3b\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)$

$$= A\cos(\omega t) - \frac{\alpha A^2}{\omega^2}\cos^2(\omega t) - \left[\beta + \frac{2\alpha}{\omega^2}\right] A^2 \sin^2(\omega t)$$

$$= A\cos(\omega t) - \frac{\alpha A^2}{\omega^2} + \frac{\alpha A^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t) - \beta A^2 \sin^2(\omega t) - 2\alpha A^2 \sin^2(\omega t)$$

$$= \boxed{A\cos(\omega t) - \frac{\alpha A^2}{\omega^2} - \left[\frac{\alpha}{\omega^2} + \beta\right] A^2 \sin^2(\omega t) = x(t)}$$

con lo que encontramos la solución de $x(t)$ sin utilizar aproximaciones sucesivas