Sistemas de Control en Variables de Estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx + r \qquad \text{Controlabilidad}: x(t_0)_{u[0,T]} \rightarrow x(T)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$

Definiciones: Un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede llevar de cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

$$\text{Si} \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{es invertible o de rango n}$$

$$\Rightarrow \text{Sistema es controlable}$$

Sistemas de Control en Variables de Estado

Un sistema es observable en el tiempo t_0 si con el sistema en el estado $x(t_0)$ es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo finito

$$\text{Observabilidad}:$$
$$\text{Si se conoce } \{u(t), y(t)\}_{[0,T]\det} \rightarrow x(t)_{[0,T]}$$

$$\text{Si} \begin{bmatrix} C & CA & \ldots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \text{ es invertible}$$
$$\text{o de rango n} \Rightarrow \text{el sistema es observable}$$

Teorema de Controlabilidad para Sistemas de Lazo Cerrado con Retroalimentación de Estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$u = -Kx + r$$

La ecuación de lazo cerrado esta dada por :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x + Br$$

Si $[A, B]$ no es controlable no existe K tal que el par $\boxed{[A\text{-}BK, B]}$ sea controlable

Teorema de Observabilidad para Sistemas de Lazo Cerrado con Retroalimentación de Estado

La observabilidad del lazo abierto y lazo cerrado debido a la retroalimentación del estado no están relacionados.

Diseño de Sistemas de Control por Ubicación de Polos a través de Retroalimentación del Estado

Ubicación de polos del sistema en lazo cerrado

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t):$ Lazo abierto

$u(t) = -Kx(t) + r(t):$ Controlador

K : Matriz de retroalimentación $1 \times n$ elementos de con ganancia constante

Diseño de Sistemas de Control por Ubicación de Polos a través de Retroalimentación del Estado

Sistemas en lazo cerrado:

$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t)$

Si $[A, B]$ es controlable, entonces existe K tal que las raices de lazo cerrado se pueden ubicar arbitrariamente

Ecuación característica :

$\det(sI - A + BK) = 0$

Diseño de Sistemas de Control por Ubicación de Polos a través de Retroalimentación del Estado

Sistema controlable

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}^T$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 - K_1 & -a_1 - K_2 & -a_2 - K_3 & \cdots & -a_{n-1} - K_n \end{bmatrix}$$

Diseño de Sistemas de Control por Ubicación de Polos a través de Retroalimentación del Estado

$$\det(sI - A + BK) =$$

$$s^n + (a_{n-1} - K_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 - K_2)s + (a_0 - K_1)$$

Entonces al asignar las raíces en los polos deseados, se obtiene un sistema de ecuaciones que se debe resolver para determinar K.

Diseño de Controladores de Sistemas Discretos por Ubicación de Polos

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$
$$u(k) = -Kx(k)$$

Entonces

$$x(k+1) = (G - HK)x(k)$$

Elegir K tal que los valores propios de G-HK se sitúen en los polos deseados en lazo cerrado.