FI1100 Introducción a la Física Moderna
Tutor: Brandon Alvarado Guerra
Fecha: 23 de noviembre de 2022

Tutoría 9

1. Resumen

- Energía: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda}$
- Efecto fotoeléctrico: $K^{max} = hf - \Phi$
- Principio de incertidumbre: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \,, \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar$
- Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo: $\left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi = \mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial \psi}{\partial t}$
- Ecuación de Schrödinger estacionaria: $\left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi = E\psi$

2. Preguntas

P1. Dos estrellas A y B, en reposo relativo, se ubican a una distancia de un año luz entre ellas. Una nave espacial sale desde A para llegar a B a una rapidez constante v_0. El capitán se propone viajar a una velocidad tal, que en su reloj transcurra un año. ¿Cuál es el valor de la velocidad v_0?

P2. Dos partículas creadas en un acelerador de alta energía se desplazan en sentidos opuestos. La rapidez de una de las partículas, medida en el laboratorio, es de $0.650c$, y la rapidez de cada partícula con respecto a la otra es de $0.950c$. ¿Cuál es la rapidez de la segunda partícula, medida en el laboratorio?

P3. Con mediciones extremadamente cuidadosas, usted determina la coordenada x del centro de masa de un automóvil, con una incertidumbre tan solo de 1 mm. La masa del vehículo es de 1200 kg.

a) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la componente x de la velocidad del centro de masa del auto, de acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg?

b) ¿El principio de incertidumbre impone un límite práctico a nuestra capacidad de hacer mediciones simultáneas de posiciones y velocidades de objetos ordinarios, como automóviles, libros y personas? Explique por qué.

P4. La naturaleza ondulatoria de las partículas da como resultado la situación mecánico-cuántica que una partícula confinada en una caja solo puede tener longitudes de onda que causen ondas estacionarias en esa caja, con nodos en sus paredes.

a) Demuestre que un electrón confinado en una caja unidimensional de longitud L tendrá niveles de energía definidos por

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \tag{1}$$

Haga esto de dos formas:

1. Utilice la relación entre la longitud de onda de De Broglie, la energía cinética de una partícula relativista, junto a su rapidez que cumple $mv = h\lambda$.
2. En base a la ecuación de ondas, obtenga la función de onda $\psi(x)$ e imponga las condiciones de borde.

b) Si un átomo de hidrógeno se modela como una caja unidimensional de longitud igual al radio de Bohr, ¿cuál es la energía (en electrón volts) del nivel mínimo de energía del electrón? Compare.

P5. Considere la función de onda $\Psi = \psi_1 e^{-i\omega_1 t} + \psi_2 e^{-i\omega_2 t}$, donde ψ_1 y ψ_2 son distintas funciones independientes del tiempo, y ω_1 y ω_2 son distintas constantes de valor real. ¿Es Ψ una función de onda para un estado estacionario? ¿Por qué?

P1. Seguimos la convención usual, donde S es el sistema fijo y S' el móvil. Así, en S' debe transcurrir un año, por lo que $\Delta t' = 1$.

Con respecto a S, la nave entre A y B recorre $\Delta x = 1$ año luz $= c$ a velocidad $v_0 \Rightarrow \Delta t = \Delta x / v_0 = c / v_0$.

Aplicando transformadas de Lorentz

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v_0 \Delta x / c^2)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{c/v_0 - v_0 \cancel{c}/c^{\cancel{2}}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{\left(1 - v_0^2/c^2\right)\frac{c}{v_0}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \sqrt{1 - v_0^2/c^2}\ \frac{c}{v_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_0^2}{c^2} = 1 - \frac{v_0^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2v_0^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

P2.

$$\xrightarrow{0.650c} \qquad \xleftarrow{0.950c}$$

- u es la velocidad de S' relativa a S $\Rightarrow u = 0.650c$
  - velocidad de partícula 1 en laboratorio -

- la rapidez de la segunda partícula no se mide en laboratorio, sino que es con respecto a la otra partícula $\Rightarrow v_x' = -0.950c$

sentido contrario

$$\Rightarrow \quad v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2}$$

$$= \frac{-0.950c + 0.650c}{1 + (0.950c)(-0.650c)/c^2}$$

$$= \frac{-0.3c}{1 - 0.6175}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = -0.784c$$

velocidad de segunda partícula medida en laboratorio

P3.

a) Incertidumbre mínima $\Rightarrow \Delta x \Delta p = h/2\pi$

$$\Rightarrow \quad \Delta p = \frac{h}{2\pi \Delta x} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{2\pi(1 \cdot 10^{-3} m)} = 1.055 \cdot 10^{-31}\ kg\ m/s$$

recordar : $\frac{[J]}{[kg]} = \frac{[m^2]}{[s^2]} \Rightarrow [J] = [kg]\frac{[m^2]}{[s^2]}$

$$\Rightarrow \quad \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{1.055 \cdot 10^{-31}\ kg\ m/s}{1200\ kg} = 8.79 \cdot 10^{-35}\ m/s$$

P4.

a) I. Consideramos energía partícula libre

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

Hacemos analogía a una cuerda sujeta en los extremos, donde se cumple

$$n\lambda_n = 2L \Rightarrow \lambda_n^2 = 4L^2/n^2$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{h^2}{2m \cdot 4L^2/n^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

II. Mediante la ec. de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \cancel{V\psi} = E\psi$$

no hay potencial

$$\Rightarrow \psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \Rightarrow \psi'' = -k^2\psi$$

$\hookrightarrow k^2 = 2mE/\hbar^2$

$$\Rightarrow \psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

fn. de probabilidad de encontrar la partícula, i.e. en los bordes se anula. Afuera la prob. debe ser 0.

$$\Rightarrow \psi(x=0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\psi(x=L) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k = n\pi/L$$

$$\Rightarrow \frac{2mE}{\hbar^2} = k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2mE \cdot \frac{4\cancel{\pi^2}}{h^2} = \frac{n^2\cancel{\pi^2}}{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

b) Tomar $L = a_0$ (radio de Bohr) y $n=1$.
Reemplazar y evaluar

$$\Rightarrow \quad E \approx 134\, eV$$

P5. Para que sea un estado estacionario se debe cumplir que $|\psi(\vec{r},t)|^2$ no dependa del tiempo. Para nuestro caso

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

$$= (\psi_1^* e^{i\omega_1 t} + \psi_2^* e^{i\omega_2 t})(\psi_1 e^{-i\omega_1 t} + \psi_2 e^{-i\omega_2 t})$$

$$= \psi_1^* \psi_1 + \psi_1 \psi_2^* e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + \psi_2^* \psi_1 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + \psi_2^* \psi_2$$

Hay dependencia temporal dado que $\omega_1 \neq \omega_2$, en el caso $\omega_1 = \omega_2$ sería un estado estacionario, pero en general no lo es.