FI1100 Introducción a la Física Moderna
Tutor: Brandon Alvarado Guerra
Fecha: 30 de noviembre de 2022

Tutoría 10

1. Resumen

- Energía: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda}$
- Efecto fotoeléctrico: $K^{max} = hf - \Phi$
- Principio de incertidumbre: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, $\quad \Delta E \Delta t \geq \hbar$
- Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo: $\left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi = \mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial \psi}{\partial t}$
- Ecuación de Schrödinger estacionaria: $\left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi = E\psi$

2. Preguntas

P1. Un oscilador armónico isotrópico tridimensional tiene una energía potencial asociada $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k'(x^2 + y^2 + z^2)$.

a) Demuestre que para ese potencial, una solución de la ecuación tridimensional de Schrödinger se expresa con $\psi = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(y)$. En esta ecuación, ψ_{n_x} es una solución a la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico unidimensional, con energía $E_{n_x} = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Las funciones ψ_{n_y} y ψ_{n_z} son análogas a las funciones de onda unidimensionales para oscilaciones en las direcciones y y z. Determine la energía asociada con esa ψ.

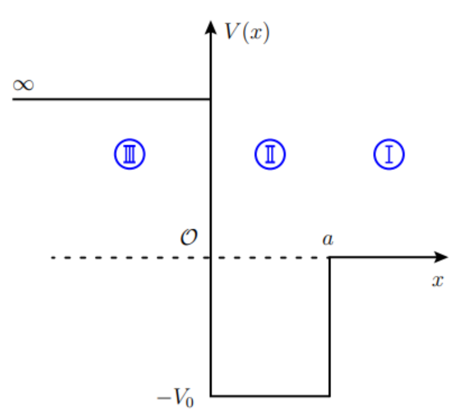
b) Demuestre que solo hay un estado (un conjunto de números cuánticos n_x, n_y y n_z) para el nivel fundamental, pero tres estados para el primer nivel excitado.

c) ¿Cuáles son las energías de nivel fundamental y del primer nivel excitado de este oscilador?

P2. Considere una partícula con masa m y energía cinética $E < V_0$ que está atrapada en el pozo de potencial definido como

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad x < 0 \\ -V_0 & \text{si} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

Resuelva la ecuación de Schrödinger para cada región del espacio y encuentre la ecuación trascendental asociada a una de las regiones.



P1. $U(x,y,z) = \frac{1}{2}k'(x^2+y^2+z^2)$

a) la ec. tridimensional de Schrödinger la denotamos como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+U\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2}k'(x^2+y^2+z^2) = (E_{n_x}+E_{n_y}+E_{n_z})\psi$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}k'x^2 - E_x\psi + \underbrace{\ldots}_{\text{dependientes de } y} + \underbrace{\ldots}_{\text{dependientes de } z} = 0$$

La única forma que se cumpla es cuando cada término es una constante, eso nos permite escribir

$$\psi = \psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y)\,\psi_{n_z}(z)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_{n_x}''\psi_{n_y}\psi_{n_z}+\psi_{n_x}\psi_{n_y}''\psi_{n_z}+\psi_{n_x}\psi_{n_y}\psi_{n_z}''\right)$$

$$+\frac{1}{2}k'(x^2+y^2+z^2)\psi_{n_x}\psi_{n_y}\psi_{n_z} = (E_{n_x}+E_{n_y}+E_{n_z})\psi_{n_x}\psi_{n_y}\psi_{n_z}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{n_x}'' + \frac{1}{2}k'x^2\psi_{n_x}\right)\psi_{n_y}\psi_{n_z}$$

$$+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{n_y}'' + \frac{1}{2}k'y^2\psi_{n_y}\right)\psi_{n_x}\psi_{n_z}$$

$$+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{n_z}'' + \frac{1}{2}k'z^2\psi_{n_z}\right)\psi_{n_x}\psi_{n_y} = (E_{n_x}+E_{n_y}+E_{n_z})\psi_{n_x}\psi_{n_y}\psi_{n_z}$$

Dividiendo por $\psi = \psi_{n_x}\psi_{n_y}\psi_{n_z}$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_{n_x}''}{\psi_{n_x}} + \frac{1}{2}k'x^2\cancel{\psi_{n_x}}\right)\cancel{\psi_{n_y}\psi_{n_z}}$$

$$+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_{n_y}''}{\psi_{n_y}} + \frac{1}{2}k'y^2\cancel{\psi_{n_y}}\right)\cancel{\psi_{n_x}\psi_{n_z}}$$

$$+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_{n_z}''}{\psi_{n_z}} + \frac{1}{2}k'z^2\cancel{\psi_{n_z}}\right)\cancel{\psi_{n_x}\psi_{n_y}} = (E_{n_x}+E_{n_y}+E_{n_z})\cancel{\psi_{n_x}\psi_{n_y}\psi_{n_z}}$$

Como cada término es una constante:

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_{n_x}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k'x^2\psi_{n_x} = E_{n_x}\psi_{n_x}$$

$\vdots$ ← análogo para y y z.

Este desarrollo solo es para demostrar que podemos expresar Ψ como una multiplicación de funciones dependientes solo de una variable espacial. De esa última ecuación notamos que se puede resolver como ya lo hemos hecho.

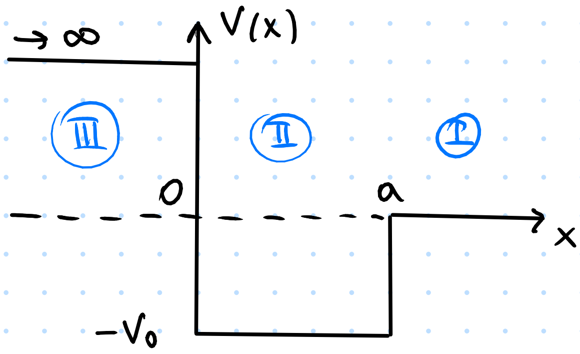
Para motivos del ejercicio, bastaba notar que se podía usar Ψ de esa forma y utilizar que $E_{n_x} = (n_x + 1/2)\hbar\omega$, siendo análogo para las demás variables. Por lo que la energía asociada a Ψ es

$$E = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = (n_x + n_y + n_z + 3/2)\hbar\omega$$

b) y c) nivel fundamental $\rightarrow$ $E_{000} = \frac{3}{2}\hbar\omega$

1^{er} estado excitado $\rightarrow$ n_x ó n_y ó $n_z = 1$ y los demás nulos, por lo que $\rightarrow$ $E_{100} = E_{010} = E_{001} = \frac{5}{2}\hbar\omega$.

P2|



$$V(x) = \begin{cases} \infty , & x<0 \\ -V_0 , & 0<x<a \\ 0 , & x>a \end{cases}$$

La ec. de Schrödinger de forma general

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

Vemos por regiones, para I:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

Definiendo $k^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2} > 0$ pues $E<0$ para estados ligados

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = k^2\psi \Rightarrow \psi_1(x) = Ae^{-kx} + \cancel{B}e^{kx}$$

0 para que no se indefina cuando $x \to \infty$
(ψ_1 normalizable)

$$\Rightarrow \psi_1(x) = Ae^{-kx} , \quad x>0$$

En II:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - V_0\psi = E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)\psi$$

Definiendo $n^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0) \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -n^2\psi$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = C\sin(nx) + D\cos(nx)$$

En III como $V(x)\to\infty$, se tiene que $\psi(x) = 0$

Con C.B. sabemos que ψ debe ser continuo por lo que

$$\psi_2\big|_{x=0} = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \psi_2(x) = C\sin(nx)$$

$$\psi_1\big|_{x=a} = \psi_2\big|_{x=a} \Rightarrow Ae^{-ka} = C\sin(na) \Rightarrow A = e^{ka}C\sin(na) \quad (1)$$

Por la continuidad de la derivada, se cumple

$$\psi_1'\big|_{x=a} = \psi_2'\big|_{x=a} \Rightarrow -Ake^{-ka} = Cn\cos(na)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} -\cancel{e^{ka}}k\cancel{C}\sin(na)\cancel{e^{-ka}} = \cancel{C}n\cos(na)$$

$$\Rightarrow tg(na) = -\frac{n}{k}$$