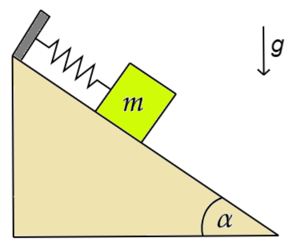
FI1100 Introducción a la Física Moderna
Tutor: Brandon Alvarado Guerra
Fecha: 21 de septiembre de 2022

Tutoría 1

P1. Derive con respecto al tiempo las siguientes expresiones:

1. $e^{x(t)} + e^{-x(t)}$
2. $t\sqrt{1+t^2}$
3. $\sin(\sin(\sin(t)))$
4. $x_0 cos(\omega t + \phi)$

P2. Considere una masa m que se encuentra unida con un resorte de constante k y largo natural ℓ_0 a una pared. Todo esto se encuentra sobre un plano inclinado en un ángulo α con respecto a la horizontal. Inicialmente, la masa está en reposo y luego es soltada.



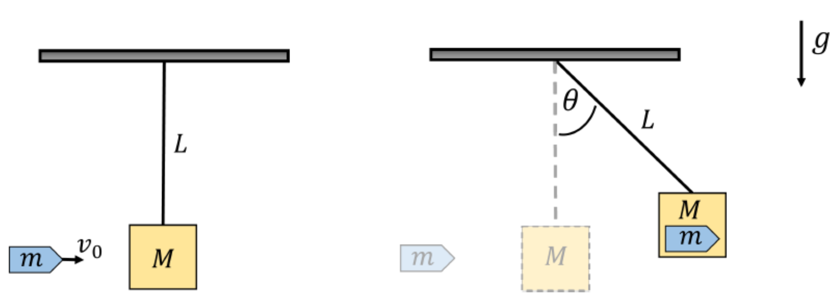
a) Encuentre la ecuación de movimiento de la masa.

b) Obtenga la solución para la posición de la masa en función del tiempo $x(t)$.
Hint: Le puede ser útil introducir un cambio de variable.

c) Aplique las condiciones iniciales descritas en el enunciado y obtenga la solución final para x(t).

d) Determine el período de oscilación de la masa.

P3. Se dispara horizontalmente una bala de masa m contra un bloque de masa M amarrado a una cuerda de largo L. La bala impacta con velocidad v_0 al bloque quedando pegada a este. Luego, los bloques comienzan a oscilar como un péndulo.



a) Obtenga la ecuación de movimiento del péndulo de masa M +m para pequeñas oscilaciones, y plantee su solución.

b) Aplique las condiciones iniciales y obtenga la solución para la coordenada $\theta(t)$ que describe al péndulo.

c) Calcule su energía mecánica

P4. Una niña de masa M está sentada en un columpio de masa m y largo L. La niña al darse vuelo con sus piernas ejerce una fuerza sobre el columpio de forma $\vec{F} = F_0 sin(\omega t)\dot{\theta}$, donde θ es la dirección tangencial al movimiento del columpio (es decir, siempre perpendicular a la cuerda, y en dirección de θ creciente). Se pide detallar:

a) La ecuación de movimiento del columpio.

b) El periodo de pequeñas oscilaciones (en ausencia de la fuerza realizada por las piernas).

c) La frecuencia ω_r de resonancia del columpio.

Introducción a la Física Moderna
Tutoría #1
Tutor: Brandon Alvarado G.

P1. 1. $$\frac{d}{dt}\left[e^{x(t)} + e^{-x(t)}\right] = e^{x}\dot{x} - e^{-x}\dot{x} = \dot{x}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

2. $$\frac{d}{dt}\left(t\sqrt{1+t^2}\right) = \sqrt{1+t^2} + \frac{t}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t$$

$$= \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

3. $$\sin(\sin(\sin(t))) = \cos(\sin(\sin(t)))\cdot(\sin(\sin(t)))'$$

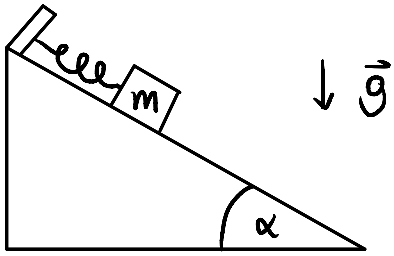
$$= \cos(\sin(\sin(t)))\cdot\cos(\sin(t))\cdot(\sin(t))'$$

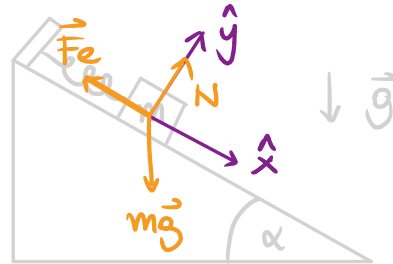
$$= \cos(\sin(\sin(t)))\cdot\cos(\sin(t))\cdot\cos(t)$$

4. $$x_0\cos(\omega t+\phi) = -x_0\sin(\omega t+\phi)\cdot(\omega t+\phi)'$$

$$= -x_0\omega\sin(\omega t+\phi)$$

P2.





a) Las ecuaciones de movimiento resultan ser

$$\hat{y}| \quad N - mg\cos\alpha = m\cancel{\ddot{y}}^{\,0} = 0 \quad \text{(no hay aceleración)}$$

$$\hat{x}| \quad mg\sin\alpha - F_e = m\ddot{x}$$

Sabemos que $F_e = k\Delta x = k(x - l_0)$

Tenemos que

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - k(x - l_0)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = g\sin\alpha - \frac{k}{m}(x - l_0)$$

Definimos $\omega^2 = k/m$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 l_0 + g\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x + c \quad ; \quad c = \omega^2 l_0 + g\sin\alpha \text{ una cte.}$$

Definamos el c.v. $y(t) = x(t) - c/\omega^2 \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -\omega^2(y + c/\omega^2) + c$$

$$\therefore \ddot{y} = -\omega^2 y$$

b) Planteamos $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \dot{y} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\therefore \ddot{y} = -\omega^2 y(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = y(t) + c/\omega^2$$

$$\therefore x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + l_0 + \frac{g}{\omega^2}\sin\alpha$$

c) Imponemos las condiciones iniciales, donde

$$x(t=0) = A\cos(\phi) + l_0 + \frac{g}{\omega^2}\sin\alpha = l_0$$

$$\Rightarrow A\cos(\phi) = -\frac{g}{\omega^2}\sin\alpha$$

Como inicialmente está quieto, su velocidad es nula

$$\dot{x}(t=0) = -A\omega\sin(\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{g}{\omega^2}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{mg}{k}\sin\alpha\cos(\omega t) + l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$$

$$\therefore x(t) = \frac{mg}{k}\sin\alpha\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\right] + l_0$$

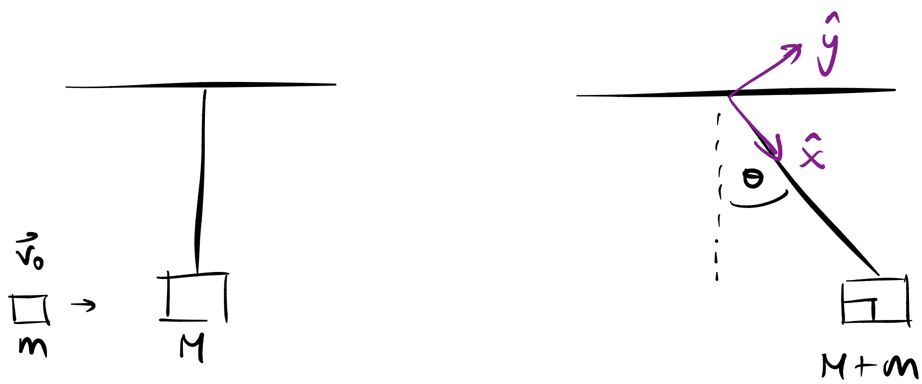
d) Conocemos las siguientes relaciones

$$\omega = 2\pi f \quad ; \quad f = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

P3.



Cuando se unen los bloques:

$$\hat{x}| \quad (M+m)g\cos\theta - T = (M+m)a_c$$

$$\hat{y}| \quad -\cancel{(M+m)}g\sin\theta = \cancel{(M+m)}a_T$$

Sabemos que en coordenadas polares

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)a_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})a_\theta$$

En nuestro caso:

$$\vec{a} = (\cancelto{0}{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\theta}^2)a_\rho + (\cancelto{0}{2\dot{\rho}\dot{\theta}} + \rho\ddot{\theta})a_\theta$$

$$\Rightarrow \quad a_c = -\dot{\theta}^2 L \quad ; \quad a_t = \ddot{\theta} L$$

$\Rightarrow \hat{y} | \quad -g\sin\theta = \ddot{\theta} L \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta$

Simplificamos a pequeñas oscilaciones:

$$\sin\theta = \theta - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \Big/ \quad \sin\theta \approx \sin(0) + \cos(0)\cdot(\theta - \cancel{\theta_0}^{\,0}) - \frac{\theta^2}{2!}\sin(0) - \frac{\theta^3}{3!}\cos(0)$$

$p.o. \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta \quad \text{MAS!}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{g/L}$$

Vemos momentum

$$p_i = p_{bala} + \cancel{p_{bloque}}^{\text{quieto}} = m v_0 \hat{x}$$

$$p_f = (M+m) v_f \hat{x}$$

Por conservación de momentum

$$p_i = p_f \Rightarrow m v_0 x = (M+m) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m v_0}{(M+m)}$$

y como $v_f = \dot{\theta}(t=0) L \Rightarrow \dot{\theta}(t=0) = \frac{v_f}{L}$

es la inicial del péndulo!

Teníamos nuestra solución

$$\theta = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad \dot\theta = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot\theta(t=0) = -A\omega\sin(\phi) = \frac{m}{M+m}\frac{V_0}{L}$$

$$\theta(t=0) = A\cos(\phi) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad -A\omega = \frac{m}{M+m}\frac{V_0}{L} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{m}{M+m}\frac{V_0}{\omega L}$$

$$\Rightarrow \quad \theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$= -\frac{m}{M+m}\frac{V_0}{\omega L}\cos(\omega t + \pi/2)$$

$$\rightarrow \cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$$

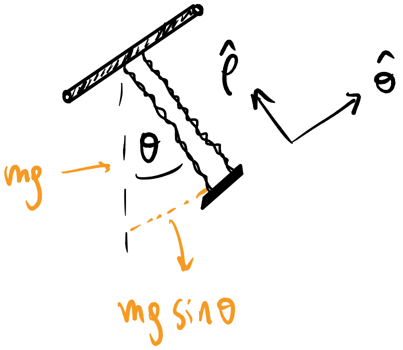
$$= \sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{m}{M+m}\right)\frac{V_0}{L}\sin\left(\sqrt{g/L}\, t\right)$$

c) Para obtener la energía mecánica

$$E = E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M+m)V_f^2$$

$$\rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}V_0^2$$

P4.



$$\Rightarrow \quad m a_T = m\ddot{\theta} L = F - mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = \frac{F_0}{mL}\sin(\omega t)$$

p.o.

enunciado

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = \frac{F_0}{mL}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad ; \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

c) $sol = sol_h + sol_p$ → depende de frecuencias

sol_h → solo depende de c.I.

$$\Rightarrow \quad y = A\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad -\omega^2 A \cancel{\sin(\omega t)} + \omega_0 A\cancel{\sin(\omega t)} = \frac{F_0}{mL}\cancel{\sin(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{F_0/mL}{\omega_0 - \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

se indefine el denominador
Explota!